Министерство образования Российской Федерации

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

Высшая математика II

А.А. Ельцов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Томск 2003

УДК 517(07)
ББК 22.1я73
Е 56

Рецензенты:
Е.Т. Ивлев, канд. физ.-мат. наук, проф.;
кафедра общей математики Томского
государственного университета,
зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук,
профессор **С.В. Панько**

Ельцов А.А., Ельцова Т.А.
Е 56 Высшая математика II. Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. — Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003. — 233 с.
ISBN

В краткой конспективной форме изложен материал по неопределенному и определенному, кратным, поверхностным и криволинейным интегралам, элементам теории поля и дифференциальным уравнениям в объеме, предусмотренном ныне действующей программой втузов. Пособие может быть использовано студентами заочных факультетов. Отличительной особенностью является использование матричного и векторного аппарата. Теоретический курс дополнен промерами и контрольными заданиями.

УДК 517(07)
ББК 22.1я73

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пособие представляет собой краткий конспект лекций по высшей математике в объёме второго семестра для студентов первого курса втузов и является естественным продолжением пособий [1–3]. Пособие состоит из пяти глав. В первой главе изучаются методы вычисления неопределённых интегралов. Во второй — рассмотрен определённый интеграл для функции одной переменной и его приложения. В третьей — рассматриваются кратные (двойные и тройные) интегралы. При изучении замены переменных в кратных интегралах используется аппарат векторного дифференциального исчисления [1, 3, 4], что формально упрощает изложение и делает его единым как для функций одной переменной, так и для функций многих переменных. В четвертой — с использованием векторного дифференциального исчисления изучаются криволинейные, поверхностные интегралы и элементы теории поля. В пятой — рассматриваются дифференциальные уравнения, в частности, линейные дифференциальные уравнения и системы линейных дифференциальных уравнений. Изложение тесно увязано с линейной алгеброй [1,2].

Весь материал разбит на блоки, содержащие небольшое число новых понятий. Материал достаточно полно иллюстрирован разнообразными примерами. После каждого блока помещены задания для самостоятельной работы с ответами, которые могут быть использованы студентами для проверки правильности усвоения материала или преподавателями для проведения практических занятий. По материалу пособия составлены три индивидуальных задания, названные контрольными работами, по 10 вариантов каждое. Их нумерация продолжает нумерацию контрольных работ из [1] или [2, 3]. Контрольная работа № 7 составлена Г.А. Ельцовой. Эти задания можно использовать в качестве контрольных работ для студентов, обучающихся заочно. Для более глубокого изучения можно использовать пособия из списка литературы.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Красноярского государственного технического университета И.И. Вайнштейну за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению книги.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Определение и свойства

В дифференциальном исчислении по данной функции находилась её производная. В этом разделе будем заниматься задачей, обратной к задаче нахождения производной.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ (дифференциала $f(x)\,dx$) на отрезке $[a,b]$, если $F(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a,b]$ ($dF(x) = f(x)dx$).

Нетрудно видеть, что функция $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ является первообразной для функции $\cos^3 x$. Действительно,

$$\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)' = \cos x - \sin^2 x \cos x = \cos x\left(1 - \sin^2 x\right) = \cos^3 x.$$

Аналогично доказывается, что $\sin 2x$ является первообразной для $2\cos 2x$.

Докажем несколько свойств первообразных.

Теорема 1.1. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то $F(x) + C$, где C — некоторая константа, также является первообразной для $f(x)$.

Доказательство. Действительно, $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$. Теорема доказана.

Теорема 1.2. Если $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две первообразные одной и той же функции, то их разность $F(x) - \Phi(x)$ есть константа.

Доказательство. Докажем вначале, что если для $x \in [a,b]$ $\varphi'(x) = 0$, то $\varphi(x)$ есть константа на $[a,b]$. Пусть x_1, x_2 — любые две точки из $[a,b]$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях существует точка ξ из отрезка $[x_1,x_2]$ такая, что $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(\xi)\,(x_2 - x_1)$. Так как по условию $\varphi'(\xi) = 0$, то $\varphi(x_2) = \varphi(x_1)$, и поэтому, в силу произвольности x_1, x_2, $\varphi(x)$ есть константа на $[a,b]$. Вычисляя производную, получаем $(F(x) - \Phi(x))' = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0$ для $x \in [a,b]$, и, по доказанному выше, $F(x)-\Phi(x)$ есть константа. Теорема доказана.

Из теорем 1.1 и 1.2 получается важный результат.

Теорема 1.3. Любые две первообразные одной и той же функции связаны соотношением $\Phi(x)=F(x)+C$.

Теорема 1.3 позволяет ввести нижеследующее определение.

Определение. Множество всех первообразных функции $f(x)$ (дифференциала $f(x)\,dx$) называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается $\int f(x)\,dx$.

Укажем несколько свойств неопределенного интеграла.

1. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

Действительно, если $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$, то $d\int f(x)\,dx = d(F(x)+C) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$.

2. $\int dF(x) = F(x)+C$.

Доказывается аналогично.

3. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$.

Вычисляя дифференциал правой части, получаем $d\left(a\int f(x)dx\right) = ad\left(\int f(x)dx\right) = af(x)dx$. Последнее означает справедливость доказываемого свойства.

4. $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)dx$.

Аналогично предыдущему, вычисляя дифференциал правой части, получаем $d\left(\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right) = d\int f(x)\,dx \pm d\int g(x)\,dx =$ $= f(x)\,dx \pm g(x)\,dx = (f(x)\pm g(x))\,dx = d\left(\int (f(x)\pm g(x))\,dx\right)$. Свойство доказано.

Заметим, что свойства 3 и 4 означают линейность операции интегрирования.

5. $\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\,x'(t)\,dt$.

Так как по свойству инвариантности формы первого дифференциала $f(x)\,dx = f(x(t))\,x'(t)\,dt$, то, используя свойство 1, получаем

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx = f(x(t))\,x'(t)\,dt = d\int f(x(t))\,x'(t)\,dt\,.$$

Утверждение доказано. Это свойство лежит в основе нахождения интеграла с помощью замены переменной.

Используя свойства 1–5 и свойства дифференциалов, сводят вычисление интегралов к так называемым табличным интегралам.

Таблица интегралов

1. $\int 0\,dx = C\,.$

2. $\int 1\,dx = x + C\,.$

3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1.$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C\,.$

5. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + \tilde{C}.$

5a. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + \tilde{C}.$

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \tilde{C}.$

6a. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + \tilde{C}.$

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C\,.$

7a. $\int e^x dx = e^x + C\,.$

8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C\,.$

9. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C\,.$

10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C\,.$

11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C\,.$

12. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C\,.$

13. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C\,.$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$. 15. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

16. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(b \sin bx + a \cos bx\right) + C$.

17. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a \sin bx - b \cos bx\right) + C$.

Формулы 5а, 6а, 16, 17 будут доказаны позднее. Остальные обратны табличным производным и могут быть легко получены.

1.2. Приемы нахождения неопределенных интегралов

Вычисление неопределённых интегралов производится сведением исходных интегралов к табличным с помощью эквивалентных преобразований с использованием свойств неопределённых интегралов.

1.2.1. Подведение под знак дифференциала

Иногда удается представить подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ в виде $\varphi(u)\,du$, где u — некоторая функция от x, то есть записать его в форме $f(x)\,dx = \varphi(u(x))\,du(x)$, и при этом интеграл $\int \varphi(u)\,du$ является табличным. Тогда если $\int \varphi(u)du =$ $= F(u) + C$, то по свойству 5 неопределённого интеграла $F(u(x)) + C = \int \varphi(u(x))du(x) = \int \varphi(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(x)\,dx$.

Этот прием называется подведением под знак дифференциала и представляет собой простейший вариант использования формулы замены переменной, выраженной свойством 5. Для овладения этим приёмом необходимы устойчивое (доведённое до автоматизма) знание таблиц производных и дифференциалов и умение ими пользоваться в обе стороны, то есть необходимо не только уметь вычислять по исходной функции производную и дифференциал, но и по дифференциалу увидеть исходную функцию. Нам также понадобится свойство дифференциала

$$df(x) = \frac{1}{a}d(af(x)) = \frac{1}{a}d(af(x)+b).$$

Пример. $\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + C.$

С другой стороны,

$$\int \sin 2x\,dx = \int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2\sin x\,d\sin x = \sin^2 x + C;$$

$$\int \sin 2x\,dx = \int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2\cos x\,d\cos x = -\cos^2 x + C.$$

Этот пример показывает, что у одной и той же функции может быть несколько разных первообразных, связанных между собой соотношением $\Phi(x) = F(x) + C$.

Займёмся более подробно указанным приёмом. Вначале приведём таблицу дифференциалов в необходимой нам форме.

Таблица основных дифференциалов

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax) = \frac{1}{a}d(ax+b)$, где a и b — некоторые числа. В частности, $dx = \frac{1}{2}d(2x) = \frac{1}{2}d(2x+b) = \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}d(3x+b)$ и так далее.

2. $x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}d\left(x^{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1}d\left(x^{\alpha+1}+b\right)$, $\alpha \neq -1$. В частности, $xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2+b\right)$, $x^2dx = \frac{1}{3}d\left(x^3\right) = \frac{1}{3}d\left(x^3+b\right)$,

$$\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right) = -d\left(\frac{1}{x}+b\right), \qquad \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}+b\right),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right) = 2d\left(\sqrt{x}+b\right).$$

3. $\frac{dx}{x} = d(\ln x) = d(\ln x + b) = \frac{1}{a} d(a \ln x + b)$.

4. $e^x dx = d(e^x) = d(e^x + b)$.

5. $\cos x dx = d \sin x = d(\sin x + b)$.

6. $\sin x dx = -d \cos x = -d(\cos x + b)$.

7. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\,tgx = d(tgx + b)$.

8. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\,ctgx = -d(ctgx + b)$.

9. $\frac{dx}{1+x^2} = d(arctgx) = -d(arcctgx)$.

10. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$.

Остальное читатель в состоянии восстановить самостоятельно из таблицы производных.

Покажем теперь применение вышесказанного для некоторых интегралов с указанием табличных, к которым они сводятся.

Интегралы $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$

$\int x \sqrt[3]{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt[3]{1+x^2} d\left(x^2\right) = \frac{1}{2} \int \sqrt[3]{1+x^2} d\left(x^2+1\right)$. В этом месте можно либо продолжить вычисления непосредственно и тогда получим $\frac{1}{2} \int \sqrt[3]{1+x^2}\ d\left(x^2+1\right) = \frac{1}{2} \int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}} d\left(x^2+1\right) =$ $= \frac{1}{2} \left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} : \frac{4}{3} + C = \frac{3}{8} \left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} + C$, либо сделать замену переменных $u = x^2 + 1$ и тогда $\frac{1}{2} \int \sqrt[3]{1+x^2} d(x^2+1) = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{3}} du =$ $= \frac{1}{2} u^{\frac{4}{3}} : \frac{4}{3} + C = \frac{3}{8} \left(1+x^2\right)^{\frac{4}{3}} + C$.

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int \sin^3 x \, d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4} + C .$$

$$\int \sin^3 5x \cos 5x \, dx = \frac{1}{5}\int \sin^3 5x \, d(\sin 5x) =$$

$$= \frac{\sin^4 5x}{5 \cdot 4} + C = \frac{\sin^4 5x}{20} + C.$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arctg} x \, d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C.$$

Интегралы $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Знак модуля опущен в силу того, что $1 + x^2 \geq 1 > 0$ для всякого x из R.

$$\int \frac{x^3 dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3 dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^4\right)}{1+x^4} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(1+x^4\right)}{1+x^4} = \frac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right) + C .$$

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \int \frac{d\left(e^x\right)}{e^x + 1} = \int \frac{d\left(e^x + 1\right)}{e^x + 1} = \ln\left(e^x + 1\right) + C .$$

$$\int \frac{\sin 3x}{1+\cos 3x} dx = -\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3x)}{1+\cos 3x} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(\cos 3x + 1)}{1+\cos 3x} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(1+\cos 3x) + C.$$

$$\int \frac{\cos 5x}{1+\sin 5x} dx = \frac{1}{5}\int \frac{d(\sin 5x)}{1+\sin 5x} = \frac{1}{5}\ln(1+\sin 5x) + C .$$

Интегралы $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + \tilde{C}$

$$\int \frac{x^3 dx}{1+x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3 dx}{1+\left(x^4\right)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^4\right)}{1+\left(x^4\right)^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^4 + C.$$

$$\int\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{1+\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C\,.$$

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+10}=\int\frac{dx}{x^2+6x+9+1}=\int\frac{dx}{(x+3)^2+1}=$$
$$=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1}=\operatorname{arctg}(x+3)+C.$$

$$\int\frac{x^5}{1+x^{12}}dx=\frac{1}{6}\int\frac{dx^6}{1+x^{12}}=\frac{1}{6}\int\frac{dx^6}{1+\left(x^6\right)^2}=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(x^6\right)+C\,.$$

$$\int\frac{x^4}{1+x^{10}}dx=\frac{1}{5}\int\frac{dx^5}{1+x^{10}}=\frac{1}{5}\int\frac{dx^5}{1+\left(x^5\right)^2}=\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(x^5\right)+C\,.$$

$$\int\frac{e^{5x}dx}{e^{10x}+1}=\frac{1}{5}\int\frac{d\left(e^{5x}\right)}{1+\left(e^{5x}\right)^2}=\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(e^{5x}\right)+C\,.$$

$$\int\frac{e^{4x}dx}{e^{8x}+1}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(e^{4x}\right)}{1+\left(e^{4x}\right)^2}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(e^{4x}\right)+C\,.$$

$$\int\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}=-\operatorname{arctg}(\cos x)+C\,.$$

Для интеграла $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$ имеем

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}==\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C\,.$$

Таким образом, нами доказана формула 5а таблицы интегралов. Часть из приведённых выше примеров можно решить, используя эту формулу.

Интегралы $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{\sqrt{1-\left(x^4\right)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x^4\right)}{\sqrt{1-\left(x^4\right)^2}} = \frac{1}{4}\arcsin\left(x^4\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C .$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-6x-8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+6x+8)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+6x+9-1)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2+6x+9)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+3)^2}} = \int \frac{d(x+3)}{\sqrt{1-(x+3)^2}} =$$

$$= \arcsin(x+3) + C.$$

$$\int \frac{e^{5x}dx}{\sqrt{1-e^{10x}}} = \frac{1}{5}\int \frac{d\left(e^{5x}\right)}{\sqrt{1-\left(e^{5x}\right)^2}} = \frac{1}{5}\arcsin\left(e^{5x}\right) + C .$$

$$\int \frac{e^{4x}dx}{\sqrt{1-e^{8x}}} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(e^{4x}\right)}{\sqrt{1-\left(e^{4x}\right)^2}} = \frac{1}{4}\arcsin\left(e^{4x}\right) + C .$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos x)}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 x}{4}}} = -\arcsin\frac{\cos x}{2} + C .$$

Для интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} == \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad .$$

Таким образом, нами доказана формула 6а таблицы интегралов. Часть из приведённых выше примеров можно решить, используя эту формулу.

Интегралы $\int e^x dx = e^x + C$

$$\int x\ e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int\ e^{x^2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}\ e^{x^2} + C.$$

$$\int x^3 e^{2x^4+1}dx = \frac{1}{8}\int e^{2x^4+1}d\left(2x^4\right) = \frac{1}{8}\int e^{2x^4+1}d\left(2x^4+1\right) = \frac{1}{8}e^{2x^4+1} + C.$$

$$\int e^{3\sin 2x}\cos 2x\,dx = \frac{1}{6}\int e^{3\sin 2x}d(3\sin 2x) = \frac{1}{6}e^{3\sin 2x} + C.$$

$$\int \frac{e^{2\,\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2\mathrm{tg}x}d(2\mathrm{tg}x) = \frac{1}{2}e^{2\mathrm{tg}x} + C.$$

Интегралы $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d2x = \frac{1}{2}\sin 2x + C.$$

$$\int x\cos\left(x^2+3\right)dx = \frac{1}{2}\int \cos\left(x^2+3\right)d\left(x^2+3\right) = \frac{1}{2}\sin\left(x^2+3\right) + C.$$

Интегралы $\int f\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\frac{dx}{x^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha}\int f\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)d\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

$$\int \cos\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2} = -\int \cos\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right) = -\sin\frac{1}{x} + C.$$

$$\int e^{1/x^2}\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\int e^{1/x^2}d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}e^{1/x^2} + C.$$

$$\int \sin\frac{1}{x^3}\frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3}\int \sin\frac{1}{x^3}d\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{3}\cos\frac{1}{x^3} + C.$$

С помощью рассмотренного приёма вычисляются первые четыре интеграла в контрольной работе № 5.

Задание 1.1. Найти интегралы:

1) $\int (1+\sin x)^3\cos x\,dx$; **2)** $\int \frac{(3+2\ln x)^5}{x}dx$; **3)** $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

4) $\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}dx$; 5) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+3\sin x}}$; 6) $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)^3}$;

7) $\int \frac{x^3}{1+x^4}dx$; 8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(2+\operatorname{tg}x)}$; 9) $\int \frac{dx}{x(5+\ln x)}$;

10) $\int \frac{xdx}{9+x^2}$; 11) $\int \frac{xdx}{16+x^2}$; 12) $\int \frac{\cos x}{9+\sin^2 x}dx$;

13) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\left(4+\operatorname{ctg}^2 x\right)}$; 14) $\int \frac{dx}{x\left(3+\ln^2 x\right)}$; 15) $\int \frac{dx}{36+x^2}$;

16) $\int \frac{dx}{9+x^2}$; 17) $\int \frac{xdx}{9+x^4}$; 18) $\int \frac{xdx}{16+9x^4}$;

19) $\int e^{x^2+\ln x}dx$; 20) $\int e^{\cos 4x}\sin 4x\,dx$;

21) $\int e^{(\ln^2 x+2)}\frac{\ln x}{x}dx$; 22) $\int e^{1/x^3}\frac{dx}{x^4}$; 23) $\int \frac{\cos\ln x}{x}dx$;

24) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,dx$; 25) $\int \frac{1}{x^7}\cos\frac{1}{x^6}dx$.

Ответы: **1)** $\frac{1}{8}(1+2\sin x)^4+C$; **2)** $\frac{1}{12}(3+2\ln x)^6+C$;

3) $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}+C$; **4)** $\sqrt{2+x^2}+C$; **5)** $\frac{2}{3}\sqrt{2+3\sin x}+C$;

6) $-\frac{1}{4}\frac{1}{(1+2\ln x)^2}+C$; **7)** $\frac{1}{4}\ln\left(1+x^4\right)+C$; **8)** $\ln|2+\operatorname{tg}x|+C$;

9) $\ln|5+\ln x|+C$; **10)** $\frac{1}{2}\ln\left(9+x^2\right)+C$; **11)** $\frac{1}{2}\ln\left(16+x^2\right)+C$;

12) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{3}+C$; **13)** $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ctg}x}{2}+C$;

14) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{\sqrt{3}}+C$; **15)** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{6}+C$; **16)** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$;

17) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{3}+C$; **18)** $\frac{1}{24}\operatorname{arctg}\frac{3x^2}{4}+C$; **19)** $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$;

20) $-\frac{1}{4}e^{\cos 4x}+C$; **21)** $\frac{1}{2}e^{(\ln^2 x+2)}+C$; **22)** $-\frac{1}{3}e^{1/x^3}+C$;

23) $-\sin\ln x+C$; **24)** $-2\sin\sqrt{x}+C$; **25)** $\frac{1}{6}\sin\left(\frac{1}{x^6}\right)+C$.

1.2.2. **Интегрирование по частям**

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ — дифференцируемые функции. Тогда $d(U(x)V(x))=U(x)dV(x)+V(x)dU(x)$. Поэтому $U(x)dV(x)=$ $=d(U(x)V(x))-V(x)dU(x)$. Вычисляя интеграл от обеих частей последнего равенства с учетом того, что $\int d(U(x)V(x))=$ $=U(x)V(x)+C$, получаем соотношение

$$\int U(x)dV(x)=UV-\int V(x)dU(x),$$

называемое формулой интегрирования по частям. Понимают его в том смысле, что множество первообразных, стоящее в левой части, совпадает со множеством первообразных, получаемых по правой части.

Пример 1. Вычислить $\int xe^x dx$.

Положим $U=x$, $dV=e^x dx$. Тогда $dU=dx$, $\int dV=\int e^x dx=$ $=e^x+C$, и в качестве V можем взять $V=e^x$. Поэтому $\int xe^x dx=$ $=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$.

Пример 2. Вычислить $\int x\cos x dx$.

Полагаем $U=x$, $dV=\cos x dx$. Тогда $dU=dx$, $\int dV=\int\cos x dx=$ $=\sin x+C$, и в качестве V можем взять $V=\sin x$. Следовательно, $\int x\cos x dx=x\sin x-\int\sin x dx=x\sin x+\cos x+C$.

П р и м е р 3. Вычислить $\int x\cos 5x dx$.

Полагаем $U = x$, $dV = \cos 5x dx$. Тогда $dU = dx$, $\int dV = \int \cos 5x dx =$

$= \frac{1}{5}\sin 5x + C$, и в качестве V можем взять $V = \frac{1}{5}\sin 5x$, поэтому

$\int x\cos 5x dx = \frac{1}{5}x\sin 5x - \frac{1}{5}\int \sin 5x dx = \frac{1}{5}x\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C$.

При использовании формулы интегрирования по частям нужно удачно выбрать U и dV, чтобы интеграл, полученный в правой части формулы, находился легче. Положим в первом примере $U = e^x$, $dV = x dx$. Тогда $dU = e^x dx$, $V = x^2/2$ и $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x dx$. Вряд ли интеграл $\int x^2 e^x dx$ можно считать проще исходного. Основные рекомендации здесь такие.

Если подынтегральная функция есть произведение полинома (многочлена) на экспоненту ($e^x = \exp(x)$) или тригонометрическую функцию, то обычно в качестве $U(x)$ выбирают полином, а всё остальное относят к $dV(x)$.

Заметим, что иногда требуется применить формулу интегрирования по частям несколько раз, например при вычислении интеграла $\int x^2 e^{3x} dx$. Полагаем $U = x^2$, $dV = e^{3x} dx$. Тогда $dU = 2x dx$, $V = \frac{1}{3}e^{3x}$ и $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{1}{3}\int 2xe^{3x} dx$. Для вычисления второго слагаемого снова применяем формулу интегрирования по частям, полагая $U = x$, $dV = e^{3x} dx$. Тогда $dU = dx$, $V = \frac{1}{3}e^{3x}$, и поэтому $\int xe^{3x} dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x} dx =$

$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$. Таким образом, $\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} -$

$- \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C$.

Интеграл $\int x^2 \sin x\, dx$ предлагается найти самостоятельно.

Приведём ещё несколько примеров на применение формулы интегрирования по частям.

Пример 4. Вычислить $\int x\,\mathrm{tg}^2 6x\,dx$.

Полагаем $U = x$, $dV = \mathrm{tg}^2 6x\,dx$. Тогда $dU = dx$, $\int \mathrm{tg}^2 6x\,dx = = \int \frac{\sin^2 6x}{\cos^2 6x}dx = \int \frac{1-\cos^2 6x}{\cos^2 6x}dx = \frac{1}{6}\mathrm{tg}\,6x - x + C$, и в качестве V можем взять $\frac{1}{6}\mathrm{tg}\,6x - x$. Поэтому $\int x\,\mathrm{tg}^2 6x dx = \frac{1}{6}x\,\mathrm{tg} 6x - x^2 - -\int\left(\frac{1}{6}\mathrm{tg}\,6x - x\right)dx = \frac{1}{6}x\,\mathrm{tg}\,6x - x^2 + \frac{1}{36}\ln|\cos 6x| + \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{6}x\,\mathrm{tg}\,6x + + \frac{1}{36}\ln|\cos 6x| - \frac{x^2}{2} + C.$

Пример 5. Вычислить $\int \arcsin^2 x\,dx$.

Полагаем $U = \arcsin^2 x$, $dV = dx$. Тогда $dU = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $V = x$ и $\int \arcsin^2 x\,dx = x\arcsin^2 x - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$. Для нахождения второго слагаемого снова применяем формулу интегрирования по частям, полагая $U = \arcsin x$, $dV = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Тогда $dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int \frac{x\ \ dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$ и в качестве V можно взять $V = -\sqrt{1-x^2}$. Таким образом, окончательно получаем

$$\int \arcsin^2 x\,dx = x\arcsin^2 x - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx =$$

$$= x\arcsin^2 x - 2\left(-\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

Пример 6. Вычислить $\int x\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx$.

Полагаем $U = \mathrm{arctg}^2 x,\ dV = x\,dx$. Тогда $dU = \frac{2\,\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx$, $V = \frac{1}{2}x^2$ и $\int x\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}^2 x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. Полагая во втором слагаемом $U = \mathrm{arctg}x,\ dV = \frac{x^2}{1+x^2}dx$, имеем $dU = \frac{dx}{1+x^2}$, $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = x - \mathrm{arctg}x + C$, поэтому в качестве V можно взять $V = x - \mathrm{arctg}x$ и, следовательно,

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{arctg}x\,dx = (x-\mathrm{arctg}x)\,\mathrm{arctg}x - \int \frac{x-\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx =$$
$$(x-\mathrm{arctg}x)\,\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2 x + C.$$

Окончательно

$$\int x\mathrm{arctg}^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\,\mathrm{arctg}^2 x - x\,\mathrm{arctg}x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Пример 7. Вычислить $\int \ln^2 x\,dx$.

Полагаем $U = \ln^2 x,\quad dV = dx$. Тогда $dU = \frac{2\ln x}{x}dx,\quad V = x$, и поэтому $\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx$. Применяя ко второму слагаемому формулу интегрирования по частям с $U = \ln x,\quad dV = dx$, имеем $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$. Поэтому $\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$.

Пример 8. Вычислить $\int x\ln^2 x\,dx$.

Полагаем $U = \ln^2 x,\quad dV = x\,dx$. Тогда $dU = \frac{2\ln x}{x}dx,\quad V = \frac{1}{2}x^2$, и поэтому $\int x\ln^2 x\,dx == \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x\,dx$. Применяя ко второму слагаемому формулу интегрирования по частям с $U = \ln x$, $dV = x\,dx$, имеем $\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$. Поэтому

$\int x\ln^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$.

П р и м е р 9. Вычислить $\int \ln(x^2+3)\,dx$.

Полагаем $U=\ln(x^2+3)$, $dV = dx$. Тогда $dU = \frac{2x\,dx}{x^2+3}$, $V = x$, и поэтому $\int \ln(x^2+3)\,dx = x\ln(x^2+3) - 2\int \frac{x^2}{x^2+3}dx = x\ln(x^2+3) - 2x +$ $+ 2\sqrt{3}\,\text{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

П р и м е р 10. Интеграл $\int \frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx$ вычисляется либо интегрированием по частям с $U = x^5$, $dV = \frac{x^4}{\left(1+x^5\right)^3}dx$, либо с помощью замены переменной $z = 1+x^5$. В первом случае $dU = 5x^4dx$, $V = -\frac{1}{10\left(1+x^5\right)^2}$, и поэтому $\int \frac{x^9}{\left(1+x^5\right)^3}dx = -\frac{x^5}{10\left(1+x^5\right)^2} +$

$$+\int \frac{5x^4}{10\left(1+x^5\right)^2}dx = -\frac{x^5}{10\left(1+x^5\right)^2} - \frac{1}{10\left(1+x^5\right)} + C.$$

Во втором случае $dz = 5x^4dx$, $x^5 = z-1$, и поэтому

$$\int \frac{x^9}{(1+x^5)^3}dx = \frac{1}{5}\int \frac{z-1}{z^3}dz = \frac{1}{5}\int \frac{1}{z^2}dz - \frac{1}{5}\int \frac{1}{z^3}dz =$$

$$= -\frac{1}{5z} + \frac{1}{10z^2} + C = -\frac{1}{5\left(1+x^5\right)} + \frac{1}{10\left(1+x^5\right)^2} + C.$$

С помощью интегрирования по частям вычисляется пятый интеграл в контрольной работе № 5 (примеры 1–9). Шестой интеграл находится аналогично примеру 10.

П р и м е р 11. Вычислить интеграл $J = \int e^x \cos x\,dx$.

Положив $U = e^x$, $dV = \cos x\,dx$, получаем $J = e^x\sin x -$ $-\int e^x \sin x\,dx$. Применив к интегралу в правой части формулу интегрирования по частям с $U = e^x$, $dV = \sin x\,dx$, имеем $J = e^x \sin x + e^x \cos x - J$. Разрешая последнее равенство относительно J, получаем $J = \int e^x \cos x\,dx = \dfrac{e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C.$

Таким образом, нами, в частном случае $a = 1$, $b = 1$, доказана формула 16 из таблицы интегралов. Интеграл примера 11, равно как и интегралы $\int e^x \sin x\,dx$, $\int e^{ax} \cos bx\,dx$, $\int e^{ax} \sin bx\,dx$, называется циклическим. Циклические интегралы вычисляются по схеме примера 11. Предлагается вывести формулы для вычисления этих интегралов самостоятельно или ознакомиться с их получением, например, в [5].

Пример 12. С помощью формулы интегрирования по частям найти $J_n = \int \dfrac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$.

Положив $U = \dfrac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^n}$, $dV = dx$, получаем

$$J_n = \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + \int \frac{2nx^2 dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} +$$

$$+ \int \frac{2n(x^2 + a^2 - a^2)\,dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + 2n \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} -$$

$$-2na^2 \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} = \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1}.$$

Из крайних частей последнего равенства, разрешая относительно J_{n+1}, получаем рекуррентную формулу

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} J_n + \frac{1}{2na^2} \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} \tag{1.1}$$

для вычисления интеграла J_{n+1} при любом n. Действительно, $J_1 = \int \dfrac{dx}{(x^2 + a^2)} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$. Тогда

$$J_2 = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = \frac{1}{2a^2} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + C.$$

Аналогично находятся $J_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}$, J_4 и так далее. По приведённой схеме эти интегралы получены в таблицах интегралов [7] и других.

Задание 1.2. Найти интегралы:

1) $\int x \sin 5x \, dx$; **2)** $\int \ln(x+1) \, dx$; **3)** $\int \ln(x^2+4) \, dx$;

4) $\int \operatorname{arctg} 2x \, dx$; **5)** $\int x \operatorname{tg}^2 2x \, dx$; **6)** $\int (x^2+1) \ln x \, dx$;

7) $\int \operatorname{arcctg} 5x \, dx$; **8)** $\int x e^{2x} dx$; **9)** $\int x^3 e^{x^2} dx$;

10) $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$; **11)** $\int e^{5x} \cos 2x \, dx$.

Ответы: **1)** $-\frac{1}{5} x \cos 5x + \frac{1}{25} x \sin 5x + C$; **2)** $x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C$; **3)** $x \ln(x^2+4) - 2x + 2\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$; **4)** $x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C$; **5)** $\frac{1}{2} x \operatorname{tg} 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} \ln|\cos 2x| + C$; **6)** $\left(\frac{x^3}{3} + x\right) \times \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C$; **7)** $x \operatorname{arcctg} 5x + \frac{1}{10} \ln\left(1 + 25x^2\right) + C$;

8) $\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$; **9)** $\frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$;

10) $\frac{2e^{2x} \cos 3x + 3e^{2x} \sin 3x}{13} + C$; **11)** $\frac{5e^{5x} \cos 2x - 2e^{5x} \cos 2x}{29} + C$.

1.2.3. Простейшие преобразования подынтегрального выражения

Рассмотрим некоторые преобразования подынтегрального выражения, применение которых позволяет иногда достаточно легко найти интеграл.

Выделение целой части

Суть приёма видна из примеров.

Примеры.

1. $\int \frac{x}{x+2}dx = \int \frac{x+2-2}{x+2}dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x+2} = x - 2\ln|x+2| + C.$

2. $\int \frac{x}{x+3}dx = \int \frac{x+3-3}{x+3}dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{x+3} = x - 3\ln|x+3| + C.$

3. $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx = \int \frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx = \int dx - 4\int \frac{dx}{x^2+4} = x - 2\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C.$

4. $\int \frac{x^2}{x^2+16}dx = \int \frac{x^2+16-16}{x^2+16}dx = \int dx - 16\int \frac{dx}{x^2+16} =$

$= x - 4\mathrm{arctg}\,\frac{x}{4} + C.$

5. $\int \frac{(x+2)^2}{x^2+4}dx = \int \frac{x^2+4+4x}{x^2+4}dx = \int dx + \int \frac{4x\,dx}{x^2+4} =$

$= \int dx + 2\int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = x + 2\ln(x^2+4) + C.$

Преобразование тригонометрического выражения

Наиболее часто применяется понижение степени с использованием формул

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

преобразование произведения в сумму по формулам

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

и некоторые другие.

Примеры.

1. $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

2. $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

3. $\int \cos 3x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x + \cos 4x)dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$

4. $\int \cos 2x \sin 5x\,dx = \frac{1}{2}\int(\sin 7x + \sin 3x)\,dx = -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos 3x}{6} + C.$

5. $\int \sin 2x \sin 6x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x - \cos 8x)dx = \frac{\sin 4x}{8} - \frac{\sin 8x}{16} + C$.

6. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$

Выделение полного квадрата

Иногда удаётся получить табличный интеграл, выделив в подынтегральной функции выражения вида $(ax+b)^2$, то есть полный квадрат двучлена $ax+b$. Покажем на примерах, как это делается.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$.

Имеем $x^2+4x+20=(x^2+4x+4)+16=(x+2)^2+4^2$. Сделав замену $x+2=t$, окончательно получаем $\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dt}{t^2+4^2} =$
$= \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4} + C$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{18x-9x^2-5}}$.

Имеем $18x-9x^2-5=-9(x^2-2x+1)+9-5=4-9(x-1)^2$. Поэтому $\int \frac{dx}{\sqrt{18x-9x^2-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-9(x-1)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3(x-1)}{2} + C$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}$.

Имеем $-x^2-2x=-(x^2+2x+1)+1=1-(x+1)^2$. Поэтому $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x}}=\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}=\arcsin(x+1)+C$.

Выделение дифференциала

Интегралы $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$ выделением в числителе дифференциала выражения x^2+px+q сводятся к интегралам $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{3x+3}{x^2+4x+20}dx$.

Производная знаменателя равна $2x+4$. Поэтому

$$\int \frac{3x+3}{x^2+4x+20}dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+20}dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+20}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+4x+20)}{x^2+4x+20}-\frac{3}{2}\int \frac{2}{x^2+4x+20}dx=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+20)-$$

$$-\frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{4}+C.$$

(Интеграл $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$ найден ранее.)

Аналогично интеграл $\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}$ выделением в числителе дифференциала подкоренного выражения сводится к интегралу $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-b)^2}}$. Проиллюстрируем это на примере.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{(4x+2)dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$.

Производная подкоренного выражения равна $-2(x+1)$. Поэтому

$$\int\frac{(4x+2)dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}=-2\int\frac{(-2(x+1)-1)dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}=$$
$$=-2\sqrt{1-(x+1)^2}+2\arcsin(x+1)+C.$$

Задание 1.3. Найти интегралы:

1) $\int\frac{x+5}{x-2}dx$; **2)** $\int\frac{2x+5}{x-3}dx$; **3)** $\int\frac{(x+5)^2}{x^2+25}dx$;

4) $\int\frac{x^2}{x^2+9}dx$; **5)** $\int\sin^2 3x\,dx$; **6)** $\int\cos^3 4x\,dx$;

7) $\int\sin 7x\cos 3x\,dx$; **8)** $\int\mathrm{tg}^2\, 3x\,dx$; **9)** $\int\mathrm{tg}^4\, 7x\,dx$;

10) $\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$; **11)** $\int\frac{dx}{x^2+4x+29}$; **12)** $\int\frac{dx}{4x^2+8x+5}$;

13) $\int\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$; **14)** $\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x^2+8x}}$;

15) $\int\frac{(x+3)\,dx}{4x^2+8x+5}$; **16)** $\int\frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{5-4x^2+8x}}$.

Ответы: **1)** $x+7\ln|x-2|+C$; **2)** $2x+11\ln|x-3|+C$;

3) $x+5\ln(x^2+25)+C$; **4)** $x-3\,\mathrm{arctg}\frac{x}{3}+C$;

5) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+C$; **6)** $\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin^3 4x+C$;

7) $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{20}\cos 10x+C$; **8)** $\frac{1}{3}\mathrm{tg}\,3x-x+C$;

9) $\frac{1}{21}\mathrm{tg}^3\,7x-\frac{1}{7}\mathrm{tg}\,7x-x+C$; **10)** $\mathrm{arctg}(x+2)+C$;

11) $\mathrm{arctg}\frac{x+2}{5}+C$; **12)** $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2x+2)+C$;

13) $\arcsin(x-3)+C$; **14)** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2(x-1)}{3}+C$;

15) $\frac{1}{8}\ln(4x^2+8x+5)+\operatorname{arctg}(2x+2)+C$;

16) $-\frac{3}{4}\sqrt{5-4x^2+8x}+\frac{11}{6}\arcsin\frac{2(x-1)}{3}+C$.

1.2.4. **Интегрирование рациональных дробей**

Рациональной дробью или рациональной функцией называется отношение двух полиномов (многочленов), то есть выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, *где*

$$P(x)=\sum_{l=0}^{k} b_l x^l = b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

и

$$Q(x)=\sum_{l=0}^{n} a_l x^l = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \text{ —}$$

полиномы (многочлены) степеней k *и* n *соответственно. Если степень полинома (многочлена) в числителе меньше степени полинома в знаменателе, то есть* $k<n$, *то такую рациональную дробь называют правильной.*

В дальнейшем будем считать, что $k<n$, так как в противном случае всегда можно представить числитель в виде $P(x)=Q(x)R(x)+S(x)$, где $R(x)$ и $S(x)$ — полиномы, называемые обычно, как и в случае действительных чисел, частным и остатком, причем степень полинома $S(x)$ меньше n. Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{S(x)}{Q(x)}, \tag{1.2}$$

а интеграл от полинома мы вычислять умеем.

Покажем на примере, как можно получить разложение (1.2). Пусть

$$P(x)=x^7+3x^6+3x^5-3x^3+4x^2+x-2,$$

$$Q(x)=x^3+3x^2+x-2.$$

Разделим полином $P(x)$ на полином $Q(x)$ так же, как мы делим вещественные числа. Имеем

$$
\begin{array}{l}
\underline{\ \ } x^7+3x^6+3x^5 \quad -3x^3+4x^2+x-2 \quad \Big| \dfrac{x^3+3x^2+x-2}{x^4+2x^2-4x+7} \\
\underline{x^7+3x^6+x^5-2x^4} \\
\qquad \underline{\ \ } 2x^5+2x^4-3x^3+4x^2+x-2 \\
\qquad \underline{2x^5+6x^4+2x^3-4x^2} \\
\qquad\qquad \underline{\ \ } -4x^4-5x^3+8x^2+x-2 \\
\qquad\qquad \underline{-4x^4-12x^3-4x^2+8x} \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\ \ } 7x^3+12x^2-7x-2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{7x^3+21x^2+7x-14} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -9x^2-14x+12
\end{array}
$$

Таким образом, мы получили целую часть дроби (частное от деления полинома P на полином Q) $R(x) = x^4+2x^2-4x+7$ и остаток $S(x)=-9x^2-14x+12$ от этого деления. Поэтому можем записать

$$\frac{x^7+3x^6+3x^5-3x^3+4x^2+x-2}{x^3+3x^2+x-2}=$$

$$=x^4+2x^2-4x+7+\frac{-9x^2-14x+12}{x^3+3x^2+x-2}.$$

Простейшими рациональными дробями назовём дроби $\dfrac{1}{x-a}$, $\dfrac{1}{(x-a)^n}$, $\dfrac{1}{x^2+a^2}$, $\dfrac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ и дроби $\dfrac{1}{x^2+px+q}$, $\dfrac{1}{(x^2+px+q)^n}$, $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ при $p^2-4q<0$.

Рассмотрим интегрирование этих дробей. Интегралы $\displaystyle\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C$, $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C, \quad n\neq 1$, $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$ являются табличными, а интеграл

$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ может быть найден или по рекуррентной формуле (1.1) $J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}J_n$, полученной выше интегрированием J_n по частям, или с помощью таблиц [5, 7]. Интегралы $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$ в случае, когда знаменатель имеет комплексные корни (дискриминант $D = p^2 - 4q < 0$), сводятся с помощью выделения полного квадрата к интегралам $\int \frac{dt}{t^2+a^2}$, $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ заменой $x + \frac{p}{2} = t$.

Наконец, как это указывалось ранее, интегралы $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$ выделением в числителе дифференциала выражения x^2+px+q сводятся к интегралам $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

Таким образом, осталось научиться раскладывать правильные рациональные дроби на сумму простейших.

По основной теореме алгебры [6] любой полином может быть разложен на простейшие множители, то есть представлен в виде $Q(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = a_n\prod_{l=1}^{n}(x-x_l)$, где x_l — действительные или комплексные корни полинома $Q(x)$, повторенные столько раз, какова их кратность.

Пусть полином $Q(x)$ имеет n различных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда правильная рациональная дробь может быть представлена в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — числа, подлежащие определению. Если x_l — корень крат-н-сти α, то ему в разложении на простейшие дроби соответствует α слагаемых $\frac{A_1}{x-x_l} + \frac{A_2}{(x-x_l)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-x_l)^\alpha}$. Если x_j —

комплексный корень кратности α полинома с действительными коэффициентами, то комплексно-сопряженное число $\bar{x}_j$ — тоже корень кратности α этого полинома. Чтобы не иметь дело с комплексными числами при интегрировании рациональных дробей, слагаемые в разложении правильной рациональной дроби, соответствующие парам комплексно-сопряженных корней, объединяют и записывают одним слагаемым вида $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, если $x_j, \bar{x}_j$ — корни кратности 1. Если $x_j, \bar{x}_j$ — корни кратности α, то им соответствует α слагаемых, и соответствующее разложение имеет вид

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\alpha x+N_\alpha}{(x^2+px+q)^\alpha}.$$

Таким образом, интегрирование правильных рациональных дробей свелось к интегрированию простейших дробей, рассмотренных выше.

Одним из способов нахождения коэффициентов A_j, M_j, N_j в разложении правильной рациональной дроби является следующий. Правую часть полученного разложения с неопределенными коэффициентами A_j, M_j, N_j приводят к общему знаменателю. Так как знаменатели правой и левой частей равны, то должны быть равны и числители, которые являются полиномами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (так как полиномы равны, если равны коэффициенты при одинаковых степенях x), получаем систему линейных уравнений для определения этих коэффициентов. Продемонстрируем изложенное на примерах.

П р и м е р 1. Найти $\displaystyle\int\frac{x^2-x+1}{x^3-3x+2}dx$.

Корни знаменателя — $x_1=-2$ кратности 1 и $x_2=1$ кратности 2. Поэтому $x^3-3x+2=(x+2)(x-1)^2$, и подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{x^2-x+1}{x^3-3x+2}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{(x-1)^2}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)(x+2) + A_3(x+2)}{x^3 - 3x + 2} =$$
$$= \frac{(A_1 + A_2)x^2 + (-2A_1 + A_2 + A_3)x + (A_1 - 2A_2 + 2A_3)}{x^3 - 3x + 2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ -2A_1 + A_2 + A_3 = -1, \\ A_1 - 2A_2 + 2A_3 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = \frac{7}{9}$, $A_2 = \frac{2}{9}$, $A_3 = \frac{1}{3}$.

Таким образом,

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}dx = \frac{7}{9}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{7}{9}\ln|x+2| + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C.$$

П р и м е р 2. Найти $\int \frac{2x^2 + 2x - 2}{x^3 - 2x - 4}dx$.

Корни знаменателя — $x_1 = 2$ кратности 1 и два комплексных корня $x_{2,3} = -1 \pm i$. Поэтому $x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2 + 2x + 2)$, и подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{2x^2 + 2x - 2}{x^3 - 2x - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 2x + 2}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{2x^2 + 2x - 2}{x^3 - 2x - 4} = \frac{A(x^2 + 2x + 2) + (Mx + N)(x-2)}{x^3 - 2x - 4} =$$
$$= \frac{(A + M)x^2 + (2A - 2M + N)x + (2A - 2N)}{x^3 - 2x - 4}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A + M = 2, \\ 2A - 2M + N = 2, \\ 2A - 2N = -2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = 1,\ \ M = 1,\ \ N = 2$.

Таким образом,

$$\int \frac{2x^2 + 2x - 2}{x^3 - 2x - 4}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{dx}{x-2} +$$

$$+\int \frac{x+1+1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

П р и м е р 3. Найти $\int \frac{-14x^2 + 54x + 43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2}dx$.

Корни знаменателя — $x_{1,2} = 5$ кратности 2 и пара комплексно-сопряжённых корней $x_{3,4} = -1 \pm i$ кратности 1. Поэтому подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{-14x^2 + 54x + 43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{(x-5)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+2}.$$

Приводя к общему знаменателю и подобные, получаем

$$\frac{-14x^2 + 54x + 43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2} = \frac{(A_1 + M)x^3 + (-3A_1 + A_2 - 10M + N)x^2}{(x^2+2x+2)(x-5)^2} +$$

$$+\frac{(-8A_1 + 2A_2 + 25M - 10N)x + (-10A_1 + 2A_2 + 25N)}{(x^2+2x+2)(x-5)^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях правой и левой частей последнего соотношения, получаем

$$\begin{cases} A_1 + M = 0, \\ -3A_1 + A_2 - 10M + N = -14, \\ -8A_1 + 2A_2 + 25M - 10N = 54, \\ -10A_1 + 2A_2 + 25N = 43. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = -2,\ \ A_2 = -1,\ \ M = 2,\ \ N = 1$.

Таким образом,

$$\int \frac{-14x^2 + 54x + 43}{(x^2+2x+2)(x-5)^2}dx = -2\int \frac{dx}{x-5} - \int \frac{dx}{(x-5)^2} + \int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= -2\ln|x-5| + \frac{1}{x-5} + \ln(x^2+2x+2) - \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{2x^3+6x^2+4}{(x^2+1)^2(x-1)}dx$.

Корни знаменателя — $x_1 = 1$ кратности 1 и два комплексных корня $x_{2,3,4,5} = \pm i$ кратности 2. Поэтому подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{2x^3+6x^2+4}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Дальнейшие вычисления предлагается проделать самостоятельно.

Задание 1.4

1. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{x^3-9x^2-22x+79}{(x^2+2x+26)(x-3)^2}dx$; **б)** $\int \frac{2x^3-5x^2+12x-49}{(x^2-6x+25)(x-1)^2}dx$.

2. Написать разложение рациональной дроби на элементарные (не находя коэффициентов):

а) $\frac{3x^2+4x-8}{\left(x^2+1\right)^3(x-2)^2(x-3)}$; **б)** $\frac{x^3-4x^2+9}{\left(x^2+2x+10\right)^2(x+1)^3(x-1)}$.

Ответы:

1. а) $\ln(x^2+2x+26) + \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{5} - \ln|x-3| + \frac{1}{x-3} + C$;

б) $\ln(x^2-6x+25) + \frac{7}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{4} + \frac{2}{x-1} + C$.

2.

а) $\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+1\right)^3} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{M_3x+N_3}{x^2+1} + \frac{A_1}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{(x-2)} + \frac{A_3}{x-3}$;

б) $\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+2x+10\right)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+2x+10} + \frac{A_1}{(x+1)^3} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{x+1} + \frac{A_4}{x-1}$.

1.2.5. Интегрирование простейших иррациональностей и выражений, содержащих тригонометрические функции

Рациональной функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *назовём отношение двух полиномов от этих переменных или, что то же самое, отношение двух линейных комбинаций всевозможных произведений целых степеней этих переменных.*

Пусть $R\left(x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, \ldots, \sqrt[r_n]{x}\right)$ — рациональная функция от $x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, \ldots, \sqrt[r_n]{x}$. Эта функция, а следовательно и интеграл от неё рационализируются подстановкой $x = t^r$, где r — наименьшее общее кратное чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Тогда $dx = rt^{r-1}dt$, и под интегралом стоит рациональная функция от t. Аналогично, если подынтегральное выражение

$$R\left(x, \sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[r_n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

есть рациональная функция от

$$x, \sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[r_n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

то подынтегральная функция рационализируется подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^r$, где r — наименьшее общее кратное чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Тогда $x = \frac{dt^r - b}{-ct^r + a}$. Подставляя в исходное выражение, получаем рациональную функцию от t.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx$.

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6. Поэтому делаем замену $x = t^6$. Тогда $dx = 6t^5dt$, и

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^6 - t^4} = 6\int \frac{t^4}{t^2 - 1}dt = 6\int \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 - 1}dt =$$

$$= 6\int (t^2+1)dt + 6\int \frac{dt}{t^2-1} = 6\int (t^2+1)dt + 3\int \frac{dt}{t-1} - 3\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t^3 + 6t + 3\ln|t-1| - 3\ln|t+1| + C = 2t^3 + 6t + 3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{\sqrt{x+2} - \sqrt[5]{(x+2)^8}}dx$.

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 5 равно 10. Поэтому делаем замену $x + 2 = t^{10}$. Тогда $dx = 10t^9dt$, и

$$\int \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{\sqrt{x+2} - \sqrt[5]{(x+2)^8}}dx = \int \frac{t^6 10t^9 dt}{t^5 - t^{16}} = 10\int \frac{t^{10}}{1-t^{11}}dt =$$

$$= -\frac{10}{11}\ln\left|\ 1 - t^{11}\ \right| + C = -\frac{10}{11}\ln\left|\ 1 - (x+2)^{\frac{11}{10}}\ \right| + C.$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{\sqrt[4]{x-1}+1}{\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{(x-1)^3}}dx.$

Наименьшее общее кратное чисел 2 и 4 равно 4. Поэтому делаем замену $x - 1 = t^4$. Тогда $dx = 4t^3dt$, и

$$\int \frac{\sqrt[4]{x-1}+1}{\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{(x-1)^3}}dx = \int \frac{(t+1)4t^3dt}{t^2 + t^3} = 4\int tdt = 2t^2 + C =$$

$$= 2\sqrt{x-1} + C.$$

Для интегрирования рациональных функций вида $R(\sin x, \cos x)$ применяют подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, которая называется универсальной тригонометрической подстановкой. Тогда $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. К сожалению, универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к большим вычислениям. Поэтому по возможности пользуются следующими подстановками. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то делают замену $\cos x = t$, и тогда $\sin x dx = -dt$. При $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ полагают $\sin x = t$, при этом $\cos x dx = dt$, а в случае $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ делают замену $\operatorname{tg} x = t$, при которой $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, или $\operatorname{ctg} x = t$. Проиллюстрируем сказанное примерами.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx$.

Делаем замену $\cos x = t$. Тогда

$$\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx = -\int t^4 \left(1 - t^2\right) dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

Делая замену $\sin x = t$, получаем

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\left(1 - t^2\right) dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C =$$
$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \dfrac{1}{\sin^4 x} dx$.

Делаем замену $\operatorname{tg} x = t$. Подставляя, получаем

$$\int \frac{1}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\left(1 + t^2\right)^2 dt}{t^4 \left(1 + t^2\right)} = \int \frac{\left(1 + t^2\right) dt}{t^4} =$$
$$= \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Заметим, что в данном примере лучше было сделать замену $\operatorname{ctg} x = t$, так как эта подстановка быстрее приводит к цели. Действительно, тогда $dx = -\dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$,

и поэтому

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}dx = -\int \frac{\left(1+t^2\right)^2 dt}{\left(1+t^2\right)} = -\int \left(1+t^2\right)dt = -\frac{t^3}{3} - t + C =$$

$$= -\frac{t^3}{3} - t + C = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \mathrm{ctg} x + C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$.

Делаем замену $\sin x = t$. Тогда

$$\int \cos^3 x \sin^8 x dx == \int t^8 \left(1-t^2\right)dt = \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + C = \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx$.

Делая замену $\sin x = t$, получаем

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{\left(1-t^2\right)dt}{1+t^2} = \int \frac{2-\left(t^2+1\right)}{1+t^2}dt =$$
$$= 2\,\mathrm{arctg}\, t - t + C = 2\,\mathrm{arctg} \sin x - \sin x + C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{1}{\cos^6 x}dx$.

Делаем замену $\mathrm{tg} x = t$. Подставляя, получаем

$$\int \frac{1}{\cos^6 x}dx = \int \frac{\left(1+t^2\right)^3 dt}{(1+t^2)} = \int \left(1+t^2\right)^2 dt =$$

$$= \int dt + \int 2t^2 dt + \int t^4 dt = t + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \mathrm{tg}\, x + \frac{2\mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} + C.$$

Для интегрирования рациональных выражений вида $R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$ применяют замену $x = a \sin t$ или $x = a \cos t$, выражений вида $R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$ — подстановку $x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$, а для интегрирования выражений вида $R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ применяют замену $x = a\,\mathrm{tg}\, t$ или $x = a\,\mathrm{ctg}\, t$. Можно в этих случаях пользоваться также заменами с гиперболическими функциями.

Пример 10. Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ воспользуемся заменой $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t dt$, $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4\sin^2 t} = 2\cos t$, и исходный интеграл равен интегралу $\int \frac{2\cos t\, dt}{4\sin^2 t\, 2\cos t}$. Тогда $\int \frac{2\cos t\, dt}{4\sin^2 t\, 2\cos t} = \int \frac{dt}{4\sin^2 t} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg} t + C$. Делая обратную замену $t = \arcsin\frac{x}{2}$, получаем $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) + C$. После преобразований получаем $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$.

Пример 11. Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ воспользуемся заменой $x = \operatorname{tg} t$. Тогда $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1}{\cos t}$, и исходный интеграл равен интегралу $\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$. Тогда $\int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C$. Делая обратную замену $t = \operatorname{arctg} x$, получаем $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sin(\operatorname{arctg} x)} + C$. После преобразований получаем $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$.

Задание 1.5. Вычислить интегралы:

1) $\int \frac{\sqrt{x-3}}{x-3-\sqrt[3]{(x-3)^2}}dx$; **2)** $\int \frac{\sqrt[4]{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+\sqrt[4]{(x+2)^3}}dx$;

3) $\int \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}+1}dx$; **4)** $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$; **5)** $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx$;

6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$; **7)** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; **8)** $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

Ответы: **1)** $2\sqrt{x-3}+6\sqrt[6]{x-3}+3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x-3}-1}{\sqrt[6]{x-3}+1}\right|+C$;

2) $2\sqrt{x+2}+C$; **3)** $2\sqrt{x+2}+C$; **4)** $\cos x-2\operatorname{arctg}\cos x+C$;

5) $\frac{\sin^7 x}{7}-\frac{\sin^9 x}{9}+C$;

6) $-\frac{1}{9}\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)+C=-\frac{1}{9}\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{x}{3}\right)+C$;

7) $-\frac{1}{16\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{4}\right)\right)}+C$; **8)** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$.

1.3. **Задача интегрирования в конечном виде**

В этой главе мы научились находить первообразные, а следовательно, и неопределённые интегралы для некоторых типов функций. В связи с этим совершенно естественным является вопрос о классе функций, для каждой из которых существует первообразная. Ответ на него даёт следующая теорема.

Теорема 1.4. Для любой непрерывной функции существует первообразная.

Обобщение понятия первообразной на функции, имеющие конечное число точек разрыва, даётся следующим образом.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ (дифференциала $f(x)dx$) на отрезке $[a,b]$, если $F(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, за исключением конечного числа точек, и $F'(x)=f(x)$ во всех точках существования производной функции $F(x)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5. Для любой функции, имеющей конечное число точек разрыва 1-го рода, существует первообразная, дифференцируемая во всех точках непрерывности подынтегральной функции.

Доказательство этих результатов, а также решение задачи восстановления первообразной будут приведены в п. 2.2.

Как известно, элементарными функциями называют степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрические и им обратные функции, а также полученные из перечисленных с помощью конечного числа их суперпозиций и конечного числа операций сложения, умножения, вычитания, деления и извлечения корня. При изучении производных мы видели, что производная элементарной функции снова есть элементарная функция. Для первообразной это не так. Не для каждой элементарной функции первообразная есть элементарная функция. Это даёт возможность введения новых, неэлементарных, функций с помощью операции интегрирования. Интегралы от функций, для которых первообразная не является элементарной функцией, называются неберущимися. Наиболее известными неэлементарными функциями являются $\int e^{-x^2}dx$, $\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx = \operatorname{si}x + C$ — интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x}dx = \operatorname{ci}x + C$ — интегральный косинус, $\operatorname{li}x + C = \int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{e^y}{y}dy$ — интегральный логарифм.

2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Определение, свойства, существование

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$ $(-\infty < a \le b < \infty)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, выберем внутри каждого элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ по точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ (если $b < a$, то разбиваем точками $a = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = b$ и ξ_i выбираем из отрезка $[x_{i+1}, x_i]$) и составим сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$. Предел сумм σ_n по всевозможным разбиениям, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения, способа выбора точек ξ_i при условии, что максимальная длина $\lambda = \max\limits_{0\le i\le n-1}|\Delta x_i| = \max\limits_{0\le i\le n-1}|x_{i+1} - x_i|$ отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ стремится к нулю, называется определенным интегралом (интегралом Римана) от функции $f(x)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а сама функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману.

Строго говоря, функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ и $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a,b]$, удовлетворяющего условию $\max\limits_{1\le i\le n}|\Delta x_i| < \delta$, и интегральных сумм σ_n, построенных с помощью этого разбиения, выполняется неравенство $|\sigma_n - I| < \varepsilon$.

Отметим некоторые свойства определенного интеграла при условии существования всех используемых ниже интегралов.

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$. Следует из определения, так как все Δx_i меняют знак.

2. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$. Действительно, если $c \in [a, b]$, то, включив c в число точек разбиения, получаем требуемое. Если $c \notin [a,b]$, то при $b < c$ применяем только что доказанное к отрезку $[a,c]$ и пользуемся свойством 1. При $c < a$ аналогично.

3. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

4. $\int\limits_a^b k\,f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

5. Если $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$ и $a \le b$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

6. Если $f(x) \le g(x)$ на $[a,b]$ и $a \le b$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

7. $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \quad (a \le b)$.

8. Если $m \le f(x) \le M$ и $a \le b$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le$ $\le M(b-a)$.

9. (Первая теорема о среднем). $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a)$, где μ — некоторое число, $m \le \mu \le M$.

Свойства 3–9 следуют из определения, так как все записанные в них соотношения справедливы для любых интегральных сумм и сохраняются при переходе к пределу.

10. (Вторая теорема о среднем). Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка c из $[a,b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Действительно, так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме о промежуточных значениях существует точка c из $[a,b]$ такая, что $f(c) = \mu$, что в силу свойства 9 влечёт требуемое.

Выясним условия интегрируемости функции $f(x)$.

Пусть $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ — какое-нибудь разбиение отрезка $[a,b]$. Положим $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, где $\inf X$ — точная нижняя грань, а $\sup X$ — точная верхняя грань множества X. Заметим, что m_i — наименьшее, а M_i — наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[x_i,x_{i+1}]$, и если функция $f(x)$ непрерывна, то по второй теореме Вейерштрасса наименьшее и наибольшее значения достигаются, и вместо $\inf$ и $\sup$ можно написать $\min$ и $\max$. Суммы $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$ и $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$ называются нижней и верхней суммами Дарбу. Заметим, что для любого разбиения отрезка $[a,b]$ и любой интегральной суммы σ_n, построенной с использованием этого разбиения, выполняется неравенство $s_n \le \sigma_n \le S_n$.

Отметим некоторые свойства сумм Дарбу.

Теорема 2.1 При добавлении числа точек разбиения нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя не увеличивается.

Доказательство. Достаточно доказать теорему в случае, когда добавлена всего лишь одна точка $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Тогда в нижней сумме Дарбу вместо слагаемого $m_i \Delta x_i$ появится сумма $m_i^1(y_i - x_i) + m_i^2(x_{i+1} - y_i)$, в которой $m_i^1 = \inf\limits_{x\in[x_i,y_i]} f(x)$, $m_i^2 = \inf\limits_{x\in[y_i,x_{i+1}]} f(x)$. Так как $m_i \le m_i^1$, $m_i \le m_i^2$ (при уменьшении промежутка наименьшее значение функции может только увеличиться), то

$$m_i^1(y_i - x_i) + m_i^2(x_{i+1} - y_i) \ge m_i(y_i - x_i) + m_i(x_{i+1} - y_i) = m_i \Delta x_i .$$

Так как все остальные слагаемые остались без изменения, то монотонное возрастание нижних сумм Дарбу доказано. Аналогично доказывается, что верхняя сумма Дарбу при добавлении числа точек разбиения не увеличивается. Теорема доказана.

Самым простым разбиением отрезка $[a,b]$ является разбиение, состоящее из точек a и b. Этому разбиению соответствуют суммы Дарбу $s_1 = m(b-a)$ и $S_1 = M(b-a)$, где $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Из теоремы 2.1 следует справедливость неравенств $s_1 \le \ldots \le s_{n-1} \le s_n \le S_n \le S_{n-1} \le \ldots \le S_1$ для любых разбиений отрезка $[a, b]$, и поэтому множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху и как ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань $I_* = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} s_n$. Аналогично доказывается, что множество верхних сумм Дарбу как ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань $I^* = \inf\limits_{n\in\mathbf{N}} S_n$. I_* и I^* называются соответственно нижним и верхним интегралами Дарбу. Нетрудно показать, что $I_* = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, $I^* = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Действительно, по определению точной верхней грани для произвольной окрестности $U(I_*)$ числа I_* найдётся разбиение отрезка $[a,b]$ такое, что нижняя сумма Дарбу s_n, соответствующая этому разбиению, принадлежит $U(I_*)$ $(s_n \in U(I_*))$. Рассматривая последовательность разбиений, включающих в найденное, получаем наше утверждение. Аналогично для верхнего интеграла Дарбу. Из свойств пределов в неравенствах следует, что $I_* \le I^*$.

Теорема 2.2. Функция $f(x)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда $I_* = I_*$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его на процесс дальнейших рассуждений. Тогда, по сказанному выше, для этого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a,b]$, для которого $\max\limits_{1\le i\le n}|\Delta x_i| < \delta$, и интегральных сумм σ_n, построенных с помощью этого разбиения, выполняется неравенство $|\sigma_n - I| < \varepsilon$.

Далее, по определению точной верхней грани для выбранного $\varepsilon > 0$ существует интегральная сумма σ_n такая, что $|\sigma_n - s_n| < \varepsilon$. Поэтому $|s_n - I| < 2\varepsilon$ для любого разбиения отрезка $[a,b]$, для которого $\max\limits_{1\le i\le n} |\Delta x_i| < \delta$. Последнее означает, что $I_* = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = I$. Аналогично показывается, что и для верхних сумм Дарбу $I^* = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = I$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $I_* = I^*$. Обозначим их общее значение через I. Так как по доказанному ранее $I = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и $s_n \le \sigma_n \le S_n$ для любого n, то по теореме о зажатой функции [3] предел интегральных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ существует и равен I. Теорема доказана.

С помощью только что доказанной теоремы можно заняться выделением множества функций, интегрируемых по Риману.

> **Теорема 2.3.** Всякая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и ξ_i, η_i — точки наименьшего и наибольшего значений этой функции на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, которые достигаются согласно второй теореме Вейерштрасса. Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то согласно теореме Римана [3, 4, 5] она равномерно непрерывна, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, y, удовлетворяющих условию $|x - y| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Пусть теперь разбиение отрезка $[a,b]$ таково, что $\max\limits_{1\le i\le n} |x_{i+1} - x_i| < \delta$. Тогда, исходя из вышесказанного, $f(\eta_i) - f(\xi_i) < \varepsilon$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ (знак модуля опущен, так как разность $f(\eta_i) - f(\xi_i)$ неотрицательна). Поэтому

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(\eta_i) - f(\xi_i))\Delta x_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \Delta x_i = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon (b - a).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$ и по предыдущей теореме функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$.

Следствие. Функция $f(x)$, имеющая на отрезке $[a,b]$ конечное число точек разрыва первого рода, интегрируема по Риману.

Доказательство. Разбиваем отрезок $[a,b]$ на участки непрерывности. На каждом из них функция интегрируема. По свойству 2 аддитивности интеграла получаем требуемое.

Теорема 2.4. Всякая монотонная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на этом отрезке.

Примем эту теорему без доказательства.

Доказательство существования интеграла Римана для других классов функций требует введения новых понятий и дополнительных рассмотрений. Желающие могут ознакомиться с этим в [4, 5].

Примером функции, для которой не существует интеграл Римана, служит функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ – рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ – иррациональное число,} \end{cases}$$

Действительно, если при любом разбиении отрезка $[a,b]$ точки ξ_i выберем рациональными, то интегральная сумма будет равна длине отрезка интегрирования, а если точки ξ_i выберем иррациональными, то интегральная сумма будет равна нулю. Отсюда следует, что предел интегральных сумм зависит от выбора точек ξ_i и поэтому интеграл Римана от функции $D(x)$ не существует.

2.2. Интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница

Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Эту функцию называют интеграл как функция верхнего предела. Отметим несколько свойств этой функции.

Теорема 2.5. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $\Phi(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Доказательство. По свойству 9 определенного интеграла (теорема о среднем) имеем $\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt=\mu h$, откуда при $h\to 0$ получаем требуемое.

Теорема 2.6. Если $f(x)$ — непрерывная на $[a,b]$ функция, то функция $\Phi(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и $\Phi'(x)=f(x)$.

Доказательство. По свойству 10 определенного интеграла (вторая теорема о среднем) имеем $\dfrac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=f(c)$, где c — некоторая точка отрезка $[x,x+h]$. В силу непрерывности функции f получаем

$$\Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(c)=f(x).$$

Доказанная теорема решает задачу восстановления первообразной для непрерывной функции с помощью интеграла как функции верхнего предела и даёт конструктивное доказательство (то есть доказательство с построением объекта, существование которого утверждается) теоремы 1.4. Более того, если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ конечное число точек разрыва первого рода, то, разбивая отрезок на участки непрерывности функции $f(x)$, получаем, что с помощью интеграла как функции верхнего предела можно восстановить обобщённую первообразную и в этом случае, а заодно и установить справедливость теоремы 1.5.

Таким образом, $\Phi(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, следовательно, $\Phi(x)=F(x)+C$, где $F(x)$ — другая первообразная $f(x)$. Далее, так как $\Phi(a)=0$, то $0=F(a)+C$, следовательно, $C=-F(a)$ и поэтому $\Phi(x)=F(x)-F(a)$. Полагая $x=b$, получаем формулу Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\Phi(b)=F(b)-F(a).$$

Из формулы Ньютона-Лейбница следует, что для вычисления определённых интегралов мы можем применять весь набор приёмов и методов нахождения неопределённых интегралов.

Пример 1. $\int_0^1 e^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{e^1 - e^0}{2} = \frac{e-1}{2}.$

Пример 2. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3} \sin^3 x\cos x\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3} \sin^3 x\,d\sin x = \frac{\sin^4 x}{4}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/3} =$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin^4\frac{\pi}{3} - \sin^4\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\right) = \frac{5}{64}.$$

Задание 2.1. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^2 x\sqrt{2+x^2}\,dx$; **2)** $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$; **3)** $\int_0^1 \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$;

4) $\int_0^1 \frac{x^5}{4+x^{12}}\,dx$; **5)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\sin 3x}\cos 3x\,dx$; **6)** $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2}$;

7) $\int_{\frac{\pi^2}{36}}^{\frac{\pi^2}{16}} \sin\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$; **8)** $\int_0^{\frac{2}{\sqrt[4]{3}}} \frac{x\,dx}{16+9x^4}$.

Ответы: **1)** $\frac{\sqrt{216}}{3} - \frac{\sqrt{8}}{3}$; **2)** $\frac{3}{4}\left(2\sqrt[3]{2}-1\right)$; **3)** $\frac{1}{6}\ln 2$;

4) $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; **5)** $\frac{1}{6}\left(e^{-2}-1\right)$; **6)** $-\sqrt{e}+e$; **7)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; **8)** $\frac{1}{12}\pi$.

2.3. Интегрирование по частям в определённом интеграле

В определенном интеграле сохраняется формула интегрирования по частям. В этом случае она приобретает вид

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU.$$

Пример 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$. Полагаем $U = x^2$, $dV = xe^{x^2}dx$. Тогда $dU = 2xdx$, $V = \frac{1}{2}e^{x^2}$ и $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e - 0 - e + 1) = \frac{1}{2}$.

Задание 2.2. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 6x\,dx$ **;** 2) $\int_0^e \ln(x+1)\,dx$ **;**

3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\,\mathrm{tg}^2 2x\,dx$; **4)** $\int_1^3 \mathrm{arctg} 5x\,dx$; **5)** $\int_0^5 xe^{2x}dx$.

Ответы: **1)** $\frac{1}{12}\pi$; **2)** $(e+1)\ln(e+1) - e$;

3) $\frac{1}{12}\pi\sqrt{3} - \frac{1}{72}\pi^2 + \frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}$;

4) $3\mathrm{arctg}15 - \mathrm{arctg}5 - 0{,}1(\ln 226 - \ln 26)$; **5)** $\frac{1}{4}\left(9e^{10} + 1\right)$.

2.4. Замена переменных в определённом интеграле

Иногда возникает необходимость перейти в интеграле к новой переменной. Имеет место следующий результат.

Теорема 2.7. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $\varphi: \ [\alpha,\beta] \to [a,b]$ — дифференцируемое биективное (взаимно однозначное) отображение, такое, что $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Доказательство. Докажем теорему в предположении, что функция $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ интегрируема на отрезке $[\alpha,\beta]$. Это выполнено, например, когда функции $f(x)$ и $\varphi'(t)$ имеют конечное число точек разрыва первого рода (кусочно-непрерывны), так как в этом случае функция $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ также кусочно-непрерывна и по следствию из теоремы 2.3 интегрируема. Разобьём отрезок $[\alpha,\beta]$ на части точками $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Этому разбиению отрезка $[a,b]$ соответствует разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$ точками $x_i = \varphi(t_i)$. Так как $\varphi(t)$ дифференцируема, то по теореме Лагранжа о конечных приращениях [3] $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i$, где $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ — некоторая точка. Положим $\xi_i = \varphi(\tau_i) \in [x_i, x_{i+1}]$. Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(\tau_i))\,\varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i .$$

В левой части этого равенства стоит интегральная сумма для интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а справа — для интеграла $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Так как оба интеграла существуют, то, переходя в этом равенстве к пределу по всевозможным разбиениям, получаем справедливость утверждения теоремы.

П р и м е р 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^4 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

Положим $x = t^2$. Тогда $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $dx = 2t\,dt$, и поэтому исходный интеграл равен

$$\int_0^2 \frac{2t^3 dt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{\left(\left(t^3+1\right)-1\right)dt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{\left((t+1)\left(t^2-t+1\right)-1\right)dt}{1+t} =$$

$$= 2\int_0^2 \left(t^2-t+1\right)dt - 2\int_0^2 \frac{dt}{1+t} = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t)\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 2 - (\ln 3 - \ln 1)\right) = \frac{16}{3} - 2\ln 3.$$

П р и м е р 2. Вычислить интеграл $\int_3^8 \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}$. Положим $x + 1 = t^2$. Тогда $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $dx = 2tdt$, и поэтому

$$\int_3^8 \frac{dx}{2+\sqrt{x+1}} = 2\int_2^3 \frac{tdt}{t+2} = 2\int_2^3 \frac{t+2-2}{t+2}dt = 2\int_2^3 dt - 4\int_2^3 \frac{dt}{t+2} =$$

$$= 2t\Big|_2^3 - 4\ln(t+2)\Big|_2^3 = 2(3-2) - 4(\ln 5 - \ln 4) = 2 - 4\ln 1{,}25.$$

Задание 2.3. Вычислить интегралы:

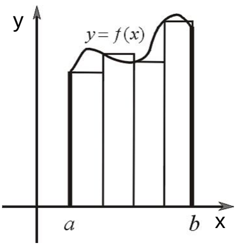
1) $\displaystyle\int_{64}^{4096} \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx$; **2)** $\displaystyle\int_2^{10} \frac{\sqrt[4]{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{(x-1)^3}}dx$;

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^4 x}$; **4)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^3 x\,dx$.

Ответы: **1)** $128 + 3\ln\frac{9}{5}$; **2)** 4; **3)** $2\sqrt{3}$; **4)** $\frac{2}{35}$.

2.5. Приближённое вычисление определённого интеграла

Если первообразная является неэлементарной функцией или находится достаточно сложно, то использование формулы Ньютона-Лейбница для вычисления определённого интеграла затруднено. В этом случае определённый интеграл вычисляют приближённо, чаще всего численно. Получением формул для численного вычисления интеграла мы и займёмся.



Пусть непрерывная функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$. Так как интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ существует, то разобьём отрезок на n частей точками $x_i = a + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$, где $h = (b-a)/n$. Положив в интегральной сумме $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ последовательно $\xi_i = x_i$, $\xi_i = x_{i+1}$ и $\xi_i = (x_i + x_{i+1})/2$, получаем в результате формулы для приближённого вычисления интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

называемые формулами прямоугольников.

Называются они так потому, что криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f(x)$, заменяется в первом случае прямоугольником, ограниченным линиями $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f(x_i)$, во втором случае прямоугольником, ограниченным линиями $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f(x_{i+1})$, а в третьем случае прямоугольником, ограниченным линиями $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f\left(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$.

Если криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f(x)$, заменить трапецией с вершинами в точках $(x_i, 0)$, $(x_{i+1}, 0)$, $(x_i, f(x_i))$, $(x_i, f(x_{i+1}))$, то для приближённого вычисления интеграла получаем формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right),$$

называемую формулой трапеций.

Точность формул прямоугольников и формулы трапеций имеет порядок $1/n^2$.

2.6. Несобственные интегралы

Выше был определён интеграл для ограниченных и заданных на ограниченном отрезке функций. Распространим понятие интеграла на случаи, когда одно или оба этих условия нарушаются.

2.6.1. Несобственные интегралы первого рода

Определение. Пусть $f(x)$ задана на бесконечном промежутке $[a,\infty)$ и для всякого $A \geq a$ существует интеграл $\int_a^A f(x)\,dx$. Предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx$ называется несобственным интегралом первого рода (интегралом по неограниченному промежутку) и обозначается $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Если $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл первого рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл первого рода называется расходящимся.

Пример 1. Рассмотрим $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} =$

$= \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_1^A \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty} \left(\ln x\Big|_1^A\right) = \lim\limits_{A\to\infty} (\ln A - \ln 1) = \infty$. Таким образом, рассмотренный интеграл при $\alpha = 1$ расходится. Пусть теперь $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^A = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{при} \quad \alpha > 1, \end{cases}$$

и мы окончательно получили, что рассматриваемый интеграл при $\alpha \le 1$ расходится и при $\alpha > 1$ сходится.

Этот интеграл часто используется в признаке сравнения в качестве эталонного.

Пример 2. Выясним сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$.

Имеем

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_1^A \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_1^A \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(\operatorname{arctg}(x-1)\Big|_1^A\right) = \lim_{A\to\infty} (\operatorname{arctg}(A-1) - \operatorname{arctg} \ 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\pi/2$.

Пример 3. Выяснить сходимость интеграла

$$\int\limits_1^\infty xe^{-x^2} dx = \int\limits_1^\infty x \exp\left(-x^2\right) dx.$$

По определению получаем

$$\int\limits_1^\infty xe^{-x^2} dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_1^A xe^{-x^2} dx = \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \int\limits_1^A e^{-x^2} d\left(-x^2\right) =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \Bigg|_1^A \right) = \frac{1}{2e} - \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2} e^{-A^2} = \frac{1}{2e}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $0{,}5\, e^{-1}$.

Пример 4. Для интеграла $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ имеем

$$\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_e^{A} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{A\to\infty} 2\sqrt{\ln x}\Big|_e^A = \lim_{A\to\infty}\left(2\sqrt{\ln A} - 2\right) = \infty .$$

Следовательно, интеграл расходится.

Пример 5. Для интеграла $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ по определению имеем

$$\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_e^{A} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_e^A = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln A} + 1\right) = 1 .$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 1.

Пример 6. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x}dx$, $\alpha > 0$.

По определению

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x}dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_0^{A} e^{-\alpha x}dx = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\int\limits_0^{A} e^{-\alpha x}d(-\alpha x) =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^A\right) = \frac{1}{\alpha} - \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\alpha}e^{-A} = \frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $1/\alpha$.

Задание 2.4. Вычислить несобственные интегралы первого рода или доказать их расходимость:

1) $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; **2)** $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$; **3)** $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$;

4) $\int\limits_0^{\infty} \frac{(x+1)dx}{x^2 + 2x + 10}$; **5)** $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$; **6)** $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$.

Ответы: **1)** 0,5; **2**) расходится; **3**) $\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$; **4**) расходится; **5)** расходится; **6)** 2.

Нам в дальнейшем понадобится следующий важный результат.

Теорема 2.8. (Критерий Коши). Несобственный интеграл первого рода сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $A \geq a$ такое, что для всех $A_1, A_2 \geq A$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Доказательство этого результата опустим.

Определение. Несобственный интеграл первого рода $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$.

Отметим, что если несобственный интеграл первого рода сходится абсолютно, то он сходится. Действительно, тогда для интеграла $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ выполнен критерий Коши, а в силу справедливости неравенства $\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| \leq \left|\int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx\right|$ критерий Коши выполнен и для интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$.

Обратное утверждение неверно, точнее, если интеграл сходится, то он не обязан сходиться абсолютно.

Сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ определяется аналогично. Предлагается проделать это самостоятельно.

Для несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ можем записать $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ и назвать этот интеграл сходящимся, если сходятся оба слагаемых. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то будем считать интеграл расходящимся. В качестве точки a выбирают обычно 0.

Пример 7. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$. По определению сходимости этого интеграла получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{A_1\to-\infty} \int\limits_{A_1}^{0} \frac{x\,dx}{1+x^2} + \lim_{A_2\to+\infty} \int\limits_{0}^{A_2} \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{A_1\to-\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{A_1}^{0} + \frac{1}{2} \lim_{A_2\to+\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{0}^{A_2}.$$

Так как оба слагаемых расходятся, то исходный интеграл расходится. Получаемая при этом неопределённость $\infty - \infty$ при разных скоростях стремления A_1 к $-\infty$ и A_2 к $+\infty$ даёт разные результаты. В частности, если $A_1 = -\sqrt{n^2-1}$, $A_2 = \sqrt{n-1}$, то

$$\frac{1}{2} \lim_{A_1\to-\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{A_1}^{0} + \frac{1}{2} \lim_{A_2\to+\infty} \ln(x^2+1)\Big|_{0}^{A_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (\ln n - 2\ln n) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = -\infty.$$

Если $A_1 = -\sqrt{n-1}$, $A_2 = \sqrt{n^2-1}$, то абсолютно аналогично показывается, что этот предел равен $+\infty$. Подобрав скорости стремления A_1 к $-\infty$ и A_2 к $+\infty$, можно получить в пределе любое заранее заданное число от $-\infty$ до $+\infty$.

С другой стороны, при согласованном стремлении верхнего и нижнего пределов к ∞ можем записать

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\Big|_{-A}^{A} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{A\to+\infty} \Big(\ln(A^2+1) - \ln(A^2+1)\Big) = 0.$$

Это дает возможность ввести новое понятие.

Определение. Говорят, что несобственный интеграл первого рода $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится в смысле главного значения

Коши, если существует и конечен предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$.

Рассмотренный выше пример показывает, что несобственный интеграл первого рода $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ может сходиться в смысле главного значения Коши и расходиться в обычном смысле.

Отметим несколько свойств несобственных интегралов первого рода $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$.

1. Если интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то для всякого $b \ge a$ интеграл $\int\limits_{b}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится и $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx + \int\limits_{b}^{\infty} f(x)\,dx$.

2. Если интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, то сходится интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} \alpha f(x)\,dx$ и имеет место равенство $\int\limits_{a}^{\infty} \alpha f(x)\,dx = \alpha\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$.

3. Если интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,dx$ сходятся, то сходятся интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} (f(x) \pm g(x))\,dx$ и имеет место равенство

$$\int\limits_{a}^{\infty} (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx \pm \int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,dx.$$

Обратное утверждение неверно, то есть если интеграл от алгебраической суммы функций сходится, то интегралы от слагаемых сходиться не обязаны. Например, интегралы $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$ и $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x+1}$

расходятся, а интеграл $\int\limits_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$, как будет показано позднее, сходится.

Для других типов несобственных интегралов первого рода свойства аналогичны.

Сходимость не всех несобственных интегралов первого рода просто выяснить по определению. Поэтому часто используют так называемые признаки сравнения в непредельной и предельной формах.

Теорема 2.9. Пусть для всякого $x \ge A$ $(A \ge a)$ выполнено неравенство $|f(x)| \le |g(x)|$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ абсолютно сходится, то интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ абсолютно сходится, а если интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ абсолютно расходится, то интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ абсолютно расходится.

Доказательство. Действительно, в условиях теоремы для всех $A \ge a$ имеем $\int\limits_a^{A}|f(x)|\,dx \le \int\limits_a^{A}|g(x)|\,dx$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^{\infty}|g(x)|\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^{A}|f(x)|\,dx$ есть монотонно возрастающая ограниченная сверху функция от A, и поэтому имеет предел при $A \to \infty$. Если интеграл $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|\,dx$ расходится, то $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^{A}|f(x)|\,dx=\infty$, и поэтому $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^{A}|g(x)|\,dx=\infty$.

Теорема 2.10. Если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые при $x \to +\infty$ одного порядка малости, то есть $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0, \infty$, то интегралы $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ либо оба абсолютно сходятся, либо оба абсолютно расходятся.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = |K|$. Возьмем $0 < \varepsilon < |K|$. По определению предела существует $M > 0$ такое, что для всех $x > M$ выполнено неравенство $|K| - \varepsilon < \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < |K| + \varepsilon$, а следовательно, и неравенство $|g(x)|\left(|K| - \varepsilon\right) < |f(x)| < \left(|K| + \varepsilon\right)|g(x)|$. Из последнего неравенства и теоремы 2.9 получаем утверждение теоремы.

Замечание. После изучения теоремы 2.10 может сложиться впечатление, что для сходимости несобственного интеграла первого рода, в том числе и абсолютной, необходимо, чтобы подынтегральная функция была бесконечно малой при $x \to \infty$. То, что это не так, показывает следующий пример [15].

Возьмем функцию, график которой состоит из отрезков прямых, соединяющих точки $\left(n - \dfrac{1}{2^n}, 0\right)$, $(n, 1)$, $\left(n + \dfrac{1}{2^n}, 0\right)$, $n = 1, 2, \ldots$. Ее аналитическое выражение имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 2^n x + 1 - n\,2^n, & x \in \left[n - \dfrac{1}{2^n}, n\right], \\ -2^n x + 1 + n\,2^n, & x \in \left[n, n + \dfrac{1}{2^n}\right], \\ 0, & x \notin \left[n - \dfrac{1}{2^n}, n + \dfrac{1}{2^n}\right]. \end{cases}$$

Площадь, заключенная между графиком этой функции и осью OX, равна сумме площадей треугольников с вершинами в точках $\left(n-\frac{1}{2^n},0\right)$, $(n,1)$, $\left(n+\frac{1}{2^n},0\right)$, $n=1,2,\ldots$. Так как площадь каждого такого треугольника равна $1/2^n$, $n=1,2,\ldots$, то $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{4}+\frac{0,25}{1-0,5}=\frac{3}{4}$. Заметим, что условие ограниченности функции $f(x)$ несущественно, так как вершины треугольников можно взять, например, в точках $\left(n-\frac{1}{n2^n},0\right)$, (n,n), $\left(n+\frac{1}{n2^n},0\right)$, $n=1,2,\ldots$.

Пример 8. Интегралы $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ и $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}dx$ сходятся абсолютно при любом $\alpha>0$. Действительно, $\left|\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\right|\le\frac{1}{x^{\alpha}}$, $\left|\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\right|\le\frac{1}{x^{\alpha}}$ для всех $x>0$, а интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ — сходящийся, а так как $\frac{1}{x^{\alpha}}>0$ если $x>0$, то и абсолютно сходящийся при любом $\alpha>1$. Напомним, что если $f(x)\ge 0$, то понятия сходимости и абсолютной сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ совпадают.

Покажем теперь, что при любом $0<\alpha\le 1$ интеграл $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ сходится, но не абсолютно. Действительно, $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{\pi}^{A}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$. Положим $U=\frac{1}{x^{\alpha}}$, $dV=\sin x dx$. Тогда $dU=-\frac{\alpha dx}{x^{\alpha+1}}$, $\int dV=\int \sin x dx=$ $=-\cos x+C$ и можем положить $V=-\cos x$. Далее получаем

$$\lim_{A\to\infty}\int_\pi^A \frac{\sin x}{x^\alpha}dx = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big|_\pi^A - \int_\pi^A \frac{\alpha\cos x}{x^{\alpha+1}}dx\right) =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big|_\pi^A\right) - \lim_{A\to\infty}\left(\int_\pi^A \frac{\alpha\cos x}{x^{\alpha+1}}dx\right).$$

Предел выражения справа существует, так как оба слагаемых имеют конечный предел. Действительно $\lim\limits_{A\to\infty}\left(-\frac{\cos x}{x}\Big|_\pi^A\right) = \frac{1}{\pi}$, а так как интеграл $\int\limits_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}dx$ сходится абсолютно при $\alpha > 0$ (показано выше), то существует и конечен предел второго слагаемого. Поэтому существует предел выражения слева и, следовательно, интеграл $\int\limits_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходящийся. Аналогично показывается, что при любом $0 < \alpha \le 1$ интеграл $\int\limits_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ сходится. Покажем теперь, что при любом $0 < \alpha \le 1$ интеграл $\int\limits_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ не является абсолютно сходящимся. Действительно, для всех вещественных чисел выполнено неравенство $\sin^2 x \le |\sin x|$. Следовательно, можем записать

$$\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx = \lim_{A\to\infty}\int_\pi^A \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx \ge \lim_{A\to\infty}\int_\pi^A \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx = \lim_{A\to\infty}\int_\pi^A \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int_\pi^A \frac{dx}{2x^\alpha} - \lim_{A\to\infty}\int_\pi^A \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}dx.$$

Так как при $0 < \alpha \le 1$ интеграл $\int\limits_\pi^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ расходящийся и $\frac{1}{x} > 0$, то $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_\pi^A \frac{dx}{2x^\alpha} = \infty$. Далее, интеграл $\int\limits_\pi^\infty \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}dx$ сходящийся, так как можем записать $\int\limits_\pi^\infty \frac{\cos 2x}{2x^\alpha}dx = 2^{\alpha-2}\int\limits_\pi^\infty \frac{\cos 2x}{(2x)^\alpha}d(2x) = 2^{\alpha-2}\int\limits_{2\pi}^\infty \frac{\cos u}{u^\alpha}du$, а последний интеграл сходящийся. Следовательно, предел второго слагаемого конечен. Тогда $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{\pi}^{A}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx=\infty$ и поэтому $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}dx$ расходится.

Заметим, что при $\alpha=1$ эти примеры рассмотрены в [5] и [8].

Пример 9. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{2+\sin x}{x^2}dx$.

Так как $\left|\frac{2+\sin x}{x^2}\right|\le\frac{3}{x^2}$ для всех $x\ge1$, а интеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{3}{x^2}dx$ сходится, то и исходный интеграл тоже сходится.

Пример 10. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx$.

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $1/x$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{x(x+1)}=\begin{cases}0, \text{ если } \alpha<2;\\ 1, \text{ если } \alpha=2;\\ \infty, \text{ если } \alpha>2.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $1/x$ равен 2, и так как $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то исходный интеграл сходится.

Пример 11. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}dx$.

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $1/x$, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{(x+1)\sqrt{x+2}}=\begin{cases}0, \text{ если } \alpha<1,5;\\ 1, \text{ если } \alpha=1,5;\\ \infty, \text{ если } \alpha>1,5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $1/x$ равен 1,5, и так как $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{1,5}}$ сходится, то исходный интеграл сходится.

П р и м е р 12. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x+2)\sqrt[3]{x+5}}dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $1/x$, получаем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}}{(x+2)\sqrt[3]{x+5}} = \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha < \frac{4}{3}; \\ 1, \text{ если } \alpha = \frac{4}{3}; \\ \infty, \text{ если } \alpha > \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $1/x$ равен $4/3$, и, следовательно, интеграл сходится.

П р и м е р 13. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x^2+4}dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $1/x$, получаем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}\sqrt{x+2}}{x^2+4} = \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha < 1,5; \\ 1, \text{ если } \alpha = 1,5; \\ \infty, \text{ если } \alpha > 1,5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $1/x$ равен 1,5, и, следовательно, интеграл сходится.

П р и м е р 14. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^3+2}}{x^2+5}dx.$

Находя порядок малости подынтегральной функции относительно функции $1/x$, получаем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha}\sqrt{x^3+2}}{x^2+5} = \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha < 0,5; \\ 1, \text{ если } \alpha = 0,5; \\ \infty, \text{ если } \alpha > 0,5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок малости подынтегральной функции относительно $1/x$ равен 0,5, и, следовательно, интеграл расходится.

П р и м е р 15. Интеграл $\int\limits_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ сходится, так как имеет место оценка $e^{-x^2} \le xe^{-x^2}$ для всех $x \ge 1$, а интеграл $\int\limits_1^{\infty} xe^{-x^2}dx$, как было показано ранее, сходящийся.

Пример 16. Интеграл $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$ расходится, так как имеет место оценка $\frac{1}{\sqrt{\ln x}} \geq \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ для всех $x \geq e$, а интеграл $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$, как было показано ранее, расходится.

Задание 2.5. Используя признак сравнения, выяснить сходимость несобственных интегралов (в ответе указаны сходимость и порядок малости подынтегральной функции относительно $1/x$):

1) $\int\limits_1^{\infty}\frac{x+3}{(x^2+1)\sqrt{x+2}}dx$; **2)** $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2+4\sqrt{x}-1}dx$;

3) $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^3+5}}dx$; **4)** $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^4+8}}dx$;

5) $\int\limits_1^{\infty}\frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{2+x^2\sqrt[3]{x+2}}dx$; **6)** $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sqrt{x+2}}{(7x+8)\sqrt[3]{x^2+1}}dx$.

Ответы: **1)** сходится, $\alpha=1{,}5$; **2)** сходится, $\alpha=1{,}5$; **3)** расходится, $\alpha=1$; **4)** сходится, $\alpha=1{,}5$; **5)** сходится, $\alpha=4/3$; **6)** сходится, $\alpha=7/6$.

2.6.2. **Несобственные интегралы второго рода**

Если $f(x)$ не ограничена на (a,b), то особенность может быть в точках a, b или во внутренней точке этого отрезка. Мы рассмотрим случай с особенностью в точке b.

Определение. Пусть $f(x)$ задана на полуинтервале $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$. Пусть далее для всякого $0<\delta<b-a$ существует интеграл $\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$. Предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ называ-

ется несобственным интегралом второго рода (интегралом от неограниченной функции) и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$. Если $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$ существует и конечен, то несобственный интеграл второго рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл второго рода называется расходящимся.

Аналогично определяются несобственные интегралы второго рода в случаях, когда подынтегральная функция бесконечно большая на нижнем пределе, во внутренней точке отрезка $[a,b]$, на верхнем и нижнем пределах одновременно. Для удобства изложения мы рассматриваем случай особенности на верхнем пределе. Для остальных вариантов предлагается проделать это самостоятельно.

Пример 1. Рассмотрим $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\ln x\Big|_\varepsilon^1\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty$. Таким образом, рассмотренный интеграл при $\alpha = 1$ расходится. Пусть теперь $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_\varepsilon^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha < 1, \\ \infty & \text{при } \alpha > 1, \end{cases}$$

и мы окончательно получили, что рассматриваемый интеграл при $\alpha < 1$ сходится и при $\alpha \geq 1$ расходится.

Аналогичные выводы можно сделать про несобственные интегралы $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$.

Интегралы $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ *используются в признаке сравнения в качестве эталонных.*

Пример 2. В интеграле $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=1$, поэтому $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{1+\delta}^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} =$

$$= \lim_{\delta\to 0} 2\sqrt{\ln x}\Big|_{1+\delta}^{e} = \lim_{\delta\to 0}\left(2\sqrt{\ln e} - 2\sqrt{\ln(1+\delta)}\right) = 2.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 3. В интеграле $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точках $x=0$ и $x=1$, поэтому интеграл разбиваем на сумму двух, например $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} = \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} + \int\limits_{0,5}^1 \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}}$.

Для первого из них

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{x\sqrt{-\ln x}} = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\delta}^{0,5} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{-\ln x}} = -\lim_{\delta\to 0} 2\sqrt{-\ln x}\Big|_{\delta}^{0,5} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left(-2\sqrt{-\ln 0,5} + 2\sqrt{-\ln\delta}\right) = -\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится, и поэтому исходный интеграл также расходится.

Пример 4. В интеграле $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=0$, поэтому

$$\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\delta}^{1/e} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_{\delta}^{1/e} = \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{\ln(1/e)} + \frac{1}{\ln\delta}\right) = 1.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 1.

Пример 5. Выясним сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x=1$. Поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\delta} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left(\arcsin(1-\delta) - \arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно $\pi/2$.

Пример 6. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 1$. По определению имеем

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\delta\to0}\int\limits_{1+\delta}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\delta\to0}\left(2\sqrt{x-1}\Big|_{1+\delta}^{2}\right)2\sqrt{x-1})\Big|_{1+\delta}^{2} = 2.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 7. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 2$. По определению имеем

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\delta\to0}\int\limits_1^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{\delta\to0}\left(2\sqrt{2-x}\right)\Big|_1^{2-\delta} = 2.$$

Следовательно, интеграл сходится и его значение равно 2.

Пример 8. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 2$. Поэтому разбиваем интеграл на сумму двух

$$\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} + \int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}.$$

Для первого из них имеем

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \lim_{\delta\to0}\int\limits_1^{2-\delta} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = -\lim_{\delta\to0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2-x)^2}\right)\Big|_1^{2-\delta} = \frac{3}{2}.$$

Аналогично доказывается сходимость второго слагаемого. Следовательно, исходный интеграл сходится.

Задание 2.6. Используя определение, выяснить сходимость несобственных интегралов второго рода:

1) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln x}}$; **2)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$; **3)** $\int\limits_{0,5}^1 \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$;

4) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{3-x}}$; **5)** $\int\limits_2^5 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-2}}$; **6)** $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}$;

7) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2-x)^3}}$; **8)** $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$; **9)** $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-3)^5}}$.

Ответы: 1) $\frac{4}{3}$; 2) расходится; 3) $\sqrt[5]{(\ln 0,5)^4}$; 4) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$; 5) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{27}$; 6) $\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{4}\right)$; 7) расходится; 8) расходится; 9) расходится.

Аналогично случаю несобственных интегралов первого рода формулируются и доказываются критерий Коши и признаки сравнения для несобственных интегралов второго рода.

Теорема 2.11. (Критерий Коши.) Несобственный интеграл второго рода сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\delta_1, \ \delta_2 \le \delta$ выполняется неравенство $\left|\int\limits_{b-\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Доказательство этого результата опустим.

Теорема 2.12. Пусть для всякого $b-\delta \le x < b$ выполнено неравенство $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда если интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, а если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ расходится.

Доказательство аналогично случаю несобственного интеграла первого рода.

Теорема 2.13. Если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие одного порядка роста, то есть $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)} = K \neq 0,\infty$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство аналогично случаю несобственного интеграла первого рода.

Пример 9. Для интеграла $\int\limits_2^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x-2}\,\sqrt[3]{3-x^2}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точках $x = 2$ и $x = \pm\sqrt{3}$. Точки $x = \pm\sqrt{3}$ в промежуток интегрирования не входят. Поэтому, находя порядок роста этой функции относительно $\dfrac{1}{x-2}$, имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^{\alpha}}{\sqrt{x-2}\,\sqrt[3]{3-x^2}} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha < 0{,}5; \\ -1, & \text{если } \alpha = 0{,}5; \\ 0, & \text{если } \alpha > 0{,}5. \end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 0,5, и интеграл сходится.

Пример 10. В интеграле $\int\limits_2^3 \dfrac{dx}{\sqrt{x-1}\,\sqrt[3]{9-x^2}}$ подынтегральная функция имеет особенность в точках $x = 1$ и $x = \pm 3$. Точки $x = 1$ и $x = -3$ в промежуток интегрирования не входят. Поэтому, находя порядок роста этой функции относительно $\dfrac{1}{3-x}$, имеем

$$\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)^{\alpha}}{\sqrt{x-1}\,\sqrt[3]{9-x^2}} = \lim_{x\to 3}\frac{(3-x)^{\alpha}}{\sqrt{x-1}\,\sqrt[3]{3-x}\,\sqrt[3]{3+x}} = \begin{cases} \infty, \text{ если } \alpha < \dfrac{1}{3}; \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt[3]{6}}, \text{ если } \alpha = \dfrac{1}{3}; \\ 0, \text{ если } \alpha > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 1/3, и интеграл сходится.

Пример 11. Выясним сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{\sin x}}{x^2}\,dx$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$. Находя порядок роста этой функции относительно $1/x$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}\sqrt{\sin x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\,\sqrt{x^3}} = \begin{cases}\infty, \text{ если } \alpha < 1,5;\\ 1, \text{ если } \alpha = 1,5;\\ 0, \text{ если } \alpha > 1,5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 1,5, и интеграл расходится.

П р и м е р 12. В интеграле $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x}dx$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$. Находя порядок роста этой функции относительно $1/x$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}\sqrt[3]{\sin x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{x^2}} = \begin{cases}\infty, \text{ если } \alpha < \frac{2}{3};\\ 1, \text{ если } \alpha = \frac{2}{3};\\ 0, \text{ если } \alpha > \frac{2}{3}.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен $2/3$, и интеграл сходится.

П р и м е р 13. Выясним сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)}{x}dx$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$. Находя порядок роста этой функции относительно $1/x$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)}{\sqrt[5]{x}\,\sqrt[5]{x^4}} = \begin{cases}\infty, \text{ если } \alpha < 0,8;\\ 1, \text{ если } \alpha = 0,8;\\ 0, \text{ если } \alpha > 0,8.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 0,8, и интеграл сходится.

П р и м е р 14. В интеграле $\int\limits_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}dx$ подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$. Находя порядок роста этой функции относительно $1/x$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)x^{\alpha}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)x^{\alpha}}{\sqrt{x}\,\sqrt{x}} = \begin{cases}\infty, \text{ если } \alpha < 0,5;\\ 1, \text{ если } \alpha = 0,5;\\ 0, \text{ если } \alpha > 0,5.\end{cases}$$

Таким образом, порядок роста равен 0,5, и интеграл сходится.

П р и м е р 15. Выяснить сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точках $x=0$ и $x=1$. Обе входят в промежуток интегрирования. Разбиваем интеграл на два

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} = \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} + \int\limits_{0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}.$$

Первый из этих интегралов сходится, так как порядок роста подынтегральной функции при $x \to 0$ относительно $1/x$ равен $1/2$, а второй — расходится, так как порядок роста подынтегральной функции при $x \to 1$ относительно $\frac{1}{1-x}$ равен 1. Поэтому интеграл расходится.

Задание 2.7. Используя теорему сравнения, выяснить сходимость несобственных интегралов (в ответе указаны: точка, в которой функция бесконечно большая; порядок роста подынтегральной функции относительно пробной функции; сходимость):

1) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}\,\sqrt[3]{x-1}}$; **2)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[5]{\sin^2 x}}{x}dx$; **3)** $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{\pi-x}}{\sin x}dx$;

4) $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[7]{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$; **5)** $\int\limits_0^2 \frac{e^{\sqrt[4]{x}}-1}{\sqrt{x^5}}dx$; **6)** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{8-x^3}}$;

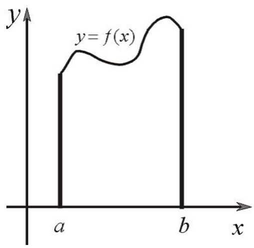
7) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{16-x^4}}$; **8)** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[7]{32-x^5}}$;

9) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}\,\sqrt[4]{9-x^2}}$; **10)** $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x+2}\,\sqrt[5]{9-x^2}}$.

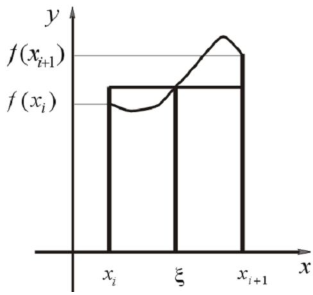
Ответы: **1)** $x=1$, $\alpha=1/3$, $x=2$, $\alpha=1/2$, сходится; **2)** $x=0$, $\alpha=3/5$, сходится; **3)** $x=0$, $\alpha=1/2$, $x=\pi$, $\alpha=2/3$, сходится; **4)** $x=0$, $\alpha=5/14$, сходится; **5)** $x=0$, $\alpha=1$, расходится; **6)** $x=2$, $\alpha=1/5$, сходится; **7)** $x=2$, $\alpha=1/3$, сходится; **8)** $x=2$, $\alpha=1/7$, сходится; **9)** $x=2$, $\alpha=1/2$, $x=3$, $\alpha=1/4$, сходится; **10)** $x=3$, $\alpha=1/5$, сходится.

2.7. Приложения определённого интеграла

2.7.1. Вычисление площадей плоских фигур



Пусть $f(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a,b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную кривыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$. Разобьём отрезок $[a,b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, выберем внутри каждого элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ по точке $\varepsilon_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Заменим криволинейную трапецию, ограниченную линиями $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f(x)$, прямоугольником $y = 0$, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, $y = f(\xi_i)$. Площадь этого прямоугольника равна $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)\Delta x_i$, и если f — непрерывная функция, то при достаточно малом Δx_i близка площади заменяемой трапеции. Просуммировав, получим, с одной стороны, приближенное значение площади криволинейной трапеции, с другой стороны, интегральную сумму $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ для интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Переходя к пределу при увеличении числа точек разбиения, получаем площадь S исходной криволинейной трапеции $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.



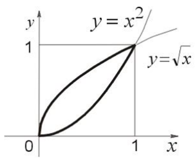
Назовём трапецию простейшей областью, если она ограничена кривыми $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и для всех $x \in [a,b]$ выполнено неравенство $f_1(x) \leq f_2(x)$. Нетрудно видеть, что для простейшей области $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$.

Аналогично, если $\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$ для всех $y \in [c,d]$, то для криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = c$, $y = d$, $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ (простейшей области второго типа), имеем

$$S = \int_c^d \left(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\right)dy .$$

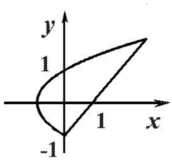
В общем случае плоскую область разбивают на простейшие области рассмотренных выше типов.

Пример 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $x = y^2$. Эти кривые пересекаются в точках $A(0,0)$ и $B(1,1)$. Поэтому



$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$. Эти кривые пересекаются в точках $A(0,-1)$ и $B(4,3)$. В данном случае лучше рассматривать простейшую область второго типа. Поэтому



$$S = \int_{-1}^{3} \left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2} \right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2} - \frac{y^3}{6} \right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{16}{3}.$$

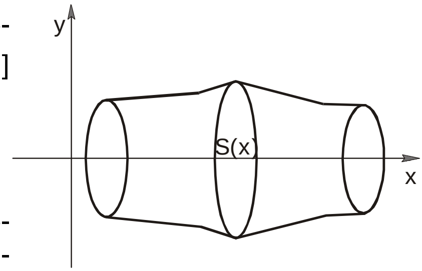
Пример 3. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = -2$, $x = 1$, $y = 0$, $y = e^{-|x|}$. В данном случае

$$S = \int_{-2}^{1} e^{-|x|}dx = \int_{-2}^{0} e^{-|x|}dx + \int_{0}^{1} e^{-|x|}dx = \int_{-2}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{1} e^{-x}dx =$$

$$= e^x\Big|_{-2}^{0} - e^{-x}\Big|_{0}^{1} = 1 - e^{-2} - e^{-1} + 1 = 2 - e^{-1} - e^{-2}.$$

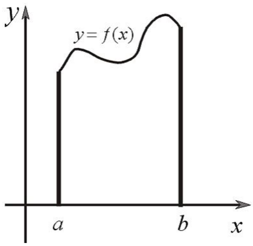
2.7.2. **Вычисление объёмов**

Пусть область такова, что для $\forall x \in [a,b]$ известна площадь $S(x)$ сечения плоскостью $x = \text{const}$. Тогда, заменяя объём области, заключенной между плоскостями $x = x_i$, $x = x_{i+1}$, на объём



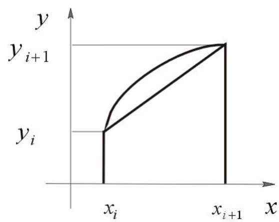
цилиндра $S(\xi_i)\,\Delta x_i$, где ξ_i — некоторая точка отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ получаем $V = \int\limits_a^b S(x)\,dx$.

Для тел, полученных вращением криволинейной трапеции $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ вокруг оси OX, имеем $V = \pi\int\limits_a^b y^2 dx = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$. Если эту трапецию



вращать вокруг оси OY, то можно показать, что $V = 2\pi\int\limits_a^b x\,f(x)\,dx$.

Аналогично для тел, полученных вращением криволинейной трапеции $c \le y \le d$, $0 \le x \le \varphi(y)$ вокруг оси OY, имеем $V = \pi\int\limits_c^d x^2 dy = \pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)\,dy$. Если эту трапецию вращать вокруг оси OX, то



$$V = 2\pi\int\limits_c^d y\,\varphi(y)\,dy.$$

Пример 1. Трапеция ограничена кривыми $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$. Вычислить объём тела, полученного вращением этой трапеции вокруг оси OX.

Подставляя в формулу, получаем

$$V = \pi\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx = \pi\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Трапеция ограничена кривыми $y = x$, $y = 0$, $x = 1$. Вычислить объём тела, полученного вращением этой трапеции вокруг оси OY.

Подставляя в формулу, получаем

$$V = 2\pi\int_0^1 x\,f(x)\,dx = 2\pi\int_0^1 x^2 dx = \frac{2\pi}{3}.$$

2.7.3. **Вычисление длины дуги кривой**

Рассмотрим кривую L. Разделим кривую на части точками (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$. Заменим дугу кривой между точками (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) хордой, эти точки соединяющей. Тогда для длины дуги Δl_i имеем $\Delta l_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Просуммировав по всем точкам деления, получаем приближенно длину дуги кривой $l \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.

Пусть кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме $r = r(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t))^T$. Разделив отрезок $[\alpha,\beta]$ точками $t_0, t_1, \dots, t_n$, получаем разбиение кривой точками $(x(t_i),\ y(t_i))^T$.

Тогда $\Delta l_i \approx \sqrt{\left(x'_t(\tau_i)\right)^2 + \left(y'_t(\tau_i)\right)^2}\,\Delta t_i$, где τ_i — точка, лежащая между t_i и t_{i+1}. Просуммировав по всем точкам деления, получаем $l \approx \sum_{i=1}^{n-1} \Delta l_i \approx \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\left(x'_t(\tau_i)\right)^2 + \left(y'_t(\tau_i)\right)^2}\,\Delta t_i$. Переходя в этой сумме к пределу при увеличении числа точек разбиения, имеем длину кривой

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'_t(t)\right)^2 + \left(y'_t(t)\right)^2}\,dt. \tag{2.1}$$

Аналогично для пространственной кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = (x(t),\ \ y(t),\ \ z(t))^T = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, длина кривой равна

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt\,. \qquad (2.2)$$

Для кривой, заданной явно уравнением $y = f(x)$, формула (2.1) приобретает вид

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx\,. \qquad (2.3)$$

Если кривая задана в полярной системе координат, то

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{cases} x_\varphi' = r_\varphi'\cos\varphi - r\sin\varphi, \\ y_\varphi' = r_\varphi'\sin\varphi + r\cos\varphi. \end{cases}$$

Подставляя в формулу (2.1) для вычисления длины кривой, получаем

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r_\varphi')^2 + r^2}\,d\varphi\,. \qquad (2.4)$$

П р и м е р 1. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$, заключенной между точками $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = \sqrt{8}$. Так как кривая задана явно, то $l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$. Делаем замену $t = \sqrt{x^2+1}$. Тогда $x^2 = t^2 - 1,\ \ 2x\,dx = 2t\,dt$, и поэтому

$$I=\int_2^3\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int_2^3 dt+\int_2^3\frac{dt}{t^2-1}=\int_2^3 dt+\frac{1}{2}\int_2^3\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{2}\int_2^3\frac{dt}{t+1}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_2^3=1+\ln\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Пример 2. Найти длину дуги кривой $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ заключенной между точками $t_1=0$ и $t_2=2\pi$.

Так как кривая задана параметрически, то $x'_t=-3a\cos^2 t\sin t$, $y'_t=3a\sin^2 t\cos t$, и поэтому

$$I=3a\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=\frac{3a}{2}\int_0^{2\pi}|\sin 2t|\,dt=$$

$$=6a\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=-6a\frac{\cos 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}=3a.$$

Пример 3. Найти длину дуги кривой $\rho=2\cos\varphi$, заключенной между точками $\varphi_1=-\frac{\pi}{2}$ и $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$. Так как кривая задана в полярной системе координат, $\rho'_\varphi=-2\sin\varphi$, то

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-2\sin\varphi)^2+(2\cos\varphi)^2}\,d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\,d\varphi=2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi.$$

Получился ожидаемый результат, так как уравнение $\rho=2\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, определяет окружность радиуса 1 с центром в точке $x=1,\ y=0$.

Задание 2.8

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=-1$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=\frac{1}{5}x^4$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = \dfrac{1}{2}x^4$.

4. Трапеция ограничена кривыми $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$. Найти объём тела, полученного вращением этой трапеции:

а) вокруг оси OX; **б)** вокруг оси OY.

5. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$, заключенной между точками $x_1 = \sqrt{8}$ и $x_2 = \sqrt{24}$.

6. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin 2t, \end{cases}$ заключенной между точками $t_1 = 0$ и $t_2 = \pi$.

7. Найти длину дуги кривой $\rho = a\sin\varphi$, заключенной между точками $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$.

Ответы: **1.** $-2 + e + \dfrac{1}{e}$; **2.** $\dfrac{125}{4}$; **3.** $\dfrac{\pi}{2} - 0,2$; **4. а)** $\dfrac{\pi}{2}(e^2 - 1)$, **б)** 2π; **5.** $1 + \ln\sqrt{\dfrac{4}{3}}$; **6.** $\sqrt{2}\,\pi$; **7.** πa.

3. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Определение и свойства

Пусть $D \subset R^n$ — некоторое множество. *Диаметром* этого множества назовём число $d = \sup\limits_{x,y \in D} \rho(x,y)$, где $\rho(x,y)$ — расстояние между точками x и y.

Определение. Пусть функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена и ограничена в области $D \subset R^n$. Разобьем область D на части поверхностями размерности $n-1$ (в R^2 — кривыми, в R^3 — поверхностями и так далее), пронумеруем полученные элементарные области D_i, выберем внутри каждой из них по точке ξ^i и составим сумму $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi^i)\sigma(D_i)$, где $\sigma(D_i)$ — мера области D_i (в R^2 – площадь, в R^3 – объём и так далее). Предел полученных сумм по всевозможным разбиениям, если этот предел существует, не зависит от способа разбиения, способа выбора точек ξ^i, при условии, что максимальный из диаметров элементарных областей стремится к нулю, называется кратным интегралом от функции $f(x)$ (двойным на плоскости, тройным в R^3 и так далее) и обозначается $\int\limits_D f(x)\,dx$ в общем случае, $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ в R^2 и $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ в R^3, а функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману.

Отметим некоторые свойства кратных интегралов при условии существования всех используемых ниже интегралов.

1. Если область D разбита на две области D_1, D_2 так, что $D = D_1 \cup D_2$ и D_1, D_2 пересекаются лишь по поверхности разбиения, то $\int\limits_D f(x)\,dx = \int\limits_{D_1} f(x)\,dx + \int\limits_{D_2} f(x)\,dx$.

2. $\int\limits_D (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_D f(x)\,dx \pm \int\limits_D g(x)\,dx$.

3. $\int\limits_D k\,f(x)\,dx = k\int\limits_D f(x)\,dx$.

Следующие ниже свойства справедливы для скалярнозначных функций.

4. Если $f(x) \ge 0$ для всех x из D, то $\int\limits_D f(x)\,dx \ge 0$.

5. Если $f(x) \le g(x)$ для всех x из D, то $\int\limits_D f(x)\,dx \le \int\limits_D g(x)\,dx$.

6. $\left|\int\limits_D f(x)\,dx\right| \le \int\limits_D |f(x)|\,dx$.

7. Если $m \le f(x) \le M$, то $m\,\sigma(D) \le \int\limits_D f(x)\,dx \le M\,\sigma(D)$.

8. $\int\limits_D f(x)\,dx = \mu\,\sigma(D)$, где μ — некоторое число, такое, что $m \le \mu \le M$.

9. Если $f(x)$ непрерывна в области D, то существует точка c из D такая, что $\int\limits_D f(x)\,dx = f(c)\,\sigma(D)$.

Аналогично тому, как это сделано при рассмотрении интеграла от функции одной переменной, можно рассмотреть нижние и верхние суммы Дарбу, нижний и верхний интегралы Дарбу и доказать следующие результаты.

Теорема 3.1. Интеграл от функции $f(x)$ по области D существует тогда и только тогда, когда нижний и верхний интегралы Дарбу равны между собой.

Теорема 3.2. Для всякой непрерывной на ограниченном замкнутом множестве функции существует интеграл по этой области.

Теорема 3.3. Если область D можно разбить на конечное число областей, в замыкании каждой из которых функция непрерывна, то она интегрируема на этом множестве.

Определения ограниченного и замкнутого множеств можно найти в [3, 5, 8]. Любознательным читателям предлагается доказать теоремы 3.1, 3.2, 3.3 самостоятельно или посмотреть их доказательства в [5, 8, 15].

3.2. **Вычисление кратных интегралов**

3.2.1. **Вычисление двойных интегралов**

Рассмотрим вначале самый простой случай прямоугольной области $D=[a,b]\times[c,d]$. Предположим, что для всякого $x\in[a,b]$ существует интеграл $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$. Разобьём отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ на части точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, $c=y_0<y_1<\ldots<y_m=d$. Положим $D_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$, $m_{i,j}=\min\limits_{(x,y)\in D_{i,j}} f(x,y)$, $M_{i,j}=\max\limits_{(x,y)\in D_{i,j}} f(x,y)$. Выберем на каждом из отрезков $[x_i,x_{i+1}]$, $i=1,2,\ldots,n$, по точке ξ_i. При любых $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,m$ и $y\in[y_j,y_{j+1}]$ справедливо неравенство

$$m_{i,j}\le f(\xi_i,y)\le M_{i,j}.$$

Интегрируя это неравенство по y на отрезке $[y_j,y_{j+1}]$, имеем

$$m_{i,j}\Delta y_j\le I_j(\xi_i)=\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i,y)\,dy\le M_{i,j}\Delta y_j.$$

Умножая последнее неравенство на Δx_i и суммируя, получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{i,j}\Delta y_j\Delta x_i\le\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i,y)dy\Delta x_i\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{i,j}\Delta y_j\Delta x_i. \tag{3.1}$$

Заметим, что в левой и правой частях неравенства (3.1) стоят соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу для интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, которые могут быть введены так же, как и для определённого интеграла. В случае, когда функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, каждая из сумм Дарбу совпадает с одной из интегральных сумм. Так как

$$\sum_{j=0}^{m-1}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i,y)\,dy\,\Delta x_i = \int\limits_c^d f(\xi_i,y)\,dy\,,$$

то, переходя в неравенстве (3.1) к пределу, имеем, в случае интегрируемости функции $f(x,y)$,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \le \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \le \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

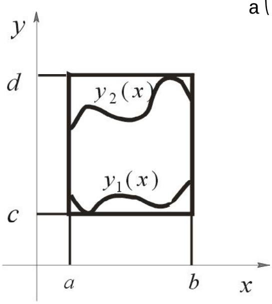
Последнее неравенство эквивалентно соотношению

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Аналогично, если существует $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Обычно вместо $\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$ пишут $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$.



Пусть теперь D — криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x=a$, $x=b$, $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, и при этом выполнено неравенство $y_1(x)\le y_2(x)$. Заключим эту область в прямоугольник $D_1=[a,b]\times[c,d]$, где

$$c=\min_{x\in[a,b]} y_1(x),\quad d=\max_{x\in[a,b]} y_2(x)\,.$$

Положим

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & \text{если } x\in D,\\ 0, & \text{если } x\notin D.\end{cases}$$

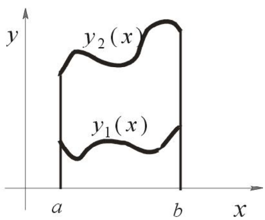
В силу построения $f^*(x,y)$ получаем

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1} f^*(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f^*(x,y)\,dy\right)dx. \quad (3.2)$$

Далее,

$$\int\limits_c^d f^*(x,y)\,dy=\int\limits_c^{y_1(x)} f^*(x,y)\,dy+\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)\,dy+\int\limits_{y_2(x)}^{d} f^*(x,y)\,dy\,.$$

Так как $\int\limits_c^{y_1(x)} f^*(x,y)\,dy=\int\limits_{y_2(x)}^{d} f^*(x,y)\,dy=0,$ то (3.2) можно переписать в виде



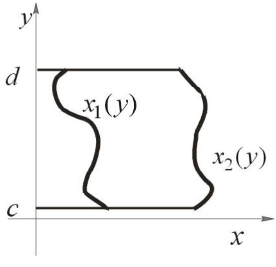
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)\,dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

или, что то же самое,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,. \quad (3.3)$$

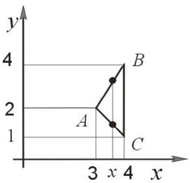
Для криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=c$, $y=d$, $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$ ($x_1(y)\le x_2(y)$ для $\forall y\in[c,d]$), имеем



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,. \quad (3.4)$$

Интегралы, стоящие в правых частях формул (3.3) и (3.4), называются повторными, а результат о сведении кратного интеграла к одному из повторных носит название теоремы Фубини.

П р и м е р 1. Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами A(3,2), B(4,4), C(4,1). Вычислить интеграл $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$.



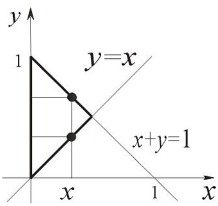
Перейдём к повторному интегралу типа (3.3) и расставим пределы интегрирования в нём. Найдём уравнения прямых AB, BC, AC. Записывая уравнение прямой, проходящей через две точки, получаем уравнение прямой AB $\dfrac{x-3}{4-3}=\dfrac{y-2}{4-2}$ или, что то же самое, $y=2x-4$. Аналогично для прямой AC: $\dfrac{x-3}{4-3}=\dfrac{y-2}{1-2}$ или $y=-x+5$. Уравнение прямой BC имеет вид $x=1$. Таким образом, область может быть задана неравенствами $3\le x\le 4$, $-x+5\le y\le 2x-4$. Поэтому

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy=\int\limits_3^4 dx\int\limits_{-x+5}^{2x-4}(x+2y)\,dy=\int\limits_3^4 \left(xy+y^2\right)\Big|_{-x+5}^{2x-4}dx=$$

$$=\int\limits_3^4\left(x(2x-4)+(2x-4)^2-x(-x+5)-(-x+5)^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_3^4(6x^2-15x-9)\,dx=\left(2x^3-\frac{15}{2}x^2-9x\right)\Big|_3^4=12,5.$$

Для перехода к интегралу типа (3.4) требуется разбить область на две. Мы подобное проделаем в следующем примере, а читателю предлагаем в данном примере сделать это самостоятельно.



П р и м е р 2. Пусть область D задана неравенствами $y+x\le 1$, $y-x\ge 0$, $x\ge 0$. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.

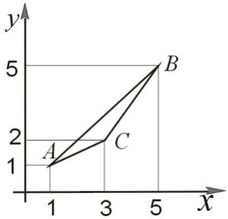
Перейдем вначале к повторному интегралу типа (3.3). Тогда $a=0$; $b=0,5$; $y_1(x)=x$; $y_2(x)=1-x$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_0^{0,5}dx\int\limits_x^{1-x}f(x,y)\,dy.$$

Для перехода к интегралу типа (3.4) требуется разбить область на две: D_1 с границами $c_1=0$; $d_1=0,5$; $x_1^1(y)=0$; $x_2^1(y)=y$ и D_2 с границами $c_2=0,5$; $d_2=1$; $x_1^2(y)=0$; $x_2^2(y)=1-y$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{0,5} dy \int\limits_0^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0,5}^{1} dy \int\limits_0^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

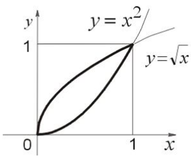
П р и м е р 3. Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами A(1,1), B(5,5), C(3,2). В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.



Найдём уравнения прямых AB, BC, AC. Уравнение прямой AB можно записать в виде $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1}$ или, что то же самое, в форме $y = x$; прямой AC — в форме $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1}$ или $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$; прямой CB — в виде $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{3}$ или $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$. Как для перехода к интегралу вида (3.2), так и для перехода к интегралу вида (3.4) приходится разбивать область на две. Для интеграла вида (3.3) соответствующие области задаются неравенствами: D_1 — $1 \le x \le 3$; $0,5x + 0,5 \le y \le x$, D_2 — $3 \le x \le 5$; $1,5x - 2,5 \le y \le x$. Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{0,5x+0,5}^{x} f(x,y)\,dy + \int\limits_3^5 dx \int\limits_{1,5x-2,5}^{x} f(x,y)\,dy.$$

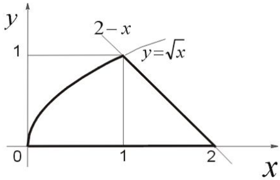
Расставить пределы интегрирования, взяв внешний интеграл по y (то есть представить двойной интеграл в виде повторного интеграла вида (3.4)), предлагается самостоятельно.



П р и м е р 4. Пусть область D задана неравенствами $y \ge x^2$, $y \le \sqrt{x}$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

П р и м е р 5. Изменить порядок интегрирования в интеграле



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dx.$$

Исходная область представлена в виде объединения двух областей: D_1 — $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le \sqrt{x}$ и D_2 — $1 \le x \le 2$; $0 \le y \le 2-x$. Таким образом, эта область ограничена кривыми $y=\sqrt{x}$, $y = 2-x$ и $x=0$. Её также можно задать неравенствами $0 \le y \le 1$, $y^2 \le x \le 2-y$.

Поэтому $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx.$

Задание 3.1

В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ для заданной области D перейти к повторным и расставить пределы интегрирования (приведены оба варианта ответа).

1. Область D задана неравенствами:

а) $x \ge |y|$, $x^2+y^2 \le 2x$; **б)** $y \ge |x|$, $x^2+y^2 \le 2y$;

в) $x \ge y$, $x^2+y^2 \le 2x$; **г)** $x \le y$, $x^2+y^2 \le 2x$;

д) $y \ge x^2$, $y \le \sqrt{-x}$; **е)** $y \ge 0$, $y \le 4-x^2$.

2. Область D есть внутренность треугольника с вершинами:
а) A(1,0), B(3,0), C(3,–4); **б)** A(1,0), B(3,1), C(5,–4);
в) A(–1,1), B(2,3), C(5,–2); **г)** A(–1,0), B(2,4), C(5,–2).

3. Область D есть внутренность четырёхугольника с вершинами A(0,0), B(2,2), C(4,1), D(3,–1).

4. В повторном интеграле поменять порядок интегрирования:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{(x-2)^2} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{-(x-2)^3} f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{-1}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_4^5 dx \int\limits_{x-5}^{0} f(x,y)dy$.

Ответы: **1. а)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy =$

$= \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy =$

$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$;

в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy =$

$= \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$;

г) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y} f(x,y)dx$;

д) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{-x}} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{-y^2} f(x,y)dx$;

е) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{4-x^2} f(x,y)dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$;

2. а) $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{-4(x-1)}^{0} f(x,y)dy = \int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{-\frac{y}{4}+1}^{3} f(x,y)dx$;

б) $$\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{-x+1}^{\frac{x-1}{2}} f(x,y)dy + \int\limits_{3}^{5} dx \int\limits_{-x+1}^{\frac{-5x+17}{2}} f(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{-y+1}^{\frac{-2y+17}{5}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y+1}^{\frac{-2y+17}{5}} f(x,y)dx \,.$$

в) $$\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{\frac{x+1}{2}}^{\frac{2x+5}{3}} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{5} dx \int\limits_{\frac{x+1}{2}}^{\frac{-5x+19}{3}} f(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} dy \int\limits_{-2y+1}^{\frac{3y-19}{5}} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{\frac{3y-5}{5}}^{\frac{3y-19}{5}} f(x,y)dy \,;$$

г) $$\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{\frac{x+1}{-3}}^{\frac{4x+4}{3}} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{5} dx \int\limits_{\frac{x+1}{-3}}^{-2x+8} f(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-3y-1}^{\frac{8-y}{2}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\frac{3y-4}{4}}^{\frac{8-y}{2}} f(x,y)dx \,;$$

3. $$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\frac{x}{3}}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{-\frac{x}{3}}^{\frac{-x+6}{2}} f(x,y)dy + \int\limits_{3}^{4} dx \int\limits_{2x-7}^{\frac{-x+6}{2}} f(x,y)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-3y}^{\frac{y+7}{2}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{\frac{y+7}{2}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y}^{6-2y} f(x,y)dx \,;$$

4. а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} f(x,y)dx$; **б)** $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{2-\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$;

в) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+5} f(x,y)dx$.

3.2.2. **Вычисление тройных интегралов**

Аналогично случаю двойного интеграла доказывается, что если $V = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ — параллелепипед, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d\left(\int\limits_e^f f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx.$$

Пусть теперь V — область, расположенная между плоскостями $x=a$, $x=b$, и для $x\in[a,b]$ область V однозначно проектируется на плоскость YOZ и D — эта проекция. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b\left(\iint\limits_D f(x,y,z)\,dy\,dz\right)dx\,.$$

Если V — цилиндр с образующими, параллельными оси OZ, направляющей, лежащей в плоскости XOY и являющейся границей области D, ограниченный поверхностями $z=z_1(x,y)$, $z=z_2(x,y)$, то

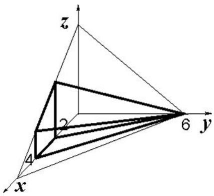
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\big(f(x,y,z)\big)dz\,.$$

П р и м е р 1. Пусть область V ограничена поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=4$, $y=4$, $z=x^2+y^2+1$. В тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.

Данная область есть цилиндр, ограниченный поверхностями $z=0$, $z=x^2+y^2+1$. Проекция этого цилиндра на плоскость XOY есть квадрат с границей $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=4$, $y=4$, которая одновременно является направляющей цилиндра. Поэтому

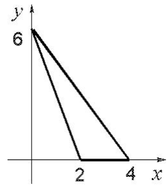
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^4 dx\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{x^2+y^2+1} f(x,y,z)\,dz.$$

П р и м е р 2. Область V ограничена поверхностями $y=0$, $z=0$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$, $x+y+z+6$. В тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования.



Область однозначно проектируется на треугольник с границей $y = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, лежащий в плоскости XOY, является цилиндром, ограниченным поверхностями $z = 0$, $z = 6 - x - y$, направляющая которого есть указанный выше треугольник. Поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^6 dy \int_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}} dx \int_0^{6-x-y} f(x,y,z)\,dz.$$



Задание 3.2. В тройном интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ перейти к повторным и расставить пределы интегрирования, если область D задана неравенствами (приведён один из вариантов ответов):

1) $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y \le 1,\ z \le x^2 + y^2 + 1$;

2) $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y \le 2,\ x^2 + y^2 \ge z$;

3) $z \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 4 - z$;

4) $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y \le 1,\ x + y + z - 2 \le 0$.

Ответы:

1) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x^2+y^2+1} f(x,y,z)\,dz$; **2)** $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz$;

3) $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{4-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz$; **4)** $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{2-x-y} f(x,y,z)\,dz$.

3.3. Замена переменных в кратных интегралах

3.3.1. Криволинейные системы координат

Положение точки на прямой, на плоскости, в R^3 и в R^n можно определить различными способами. В частности, это можно сделать, задав её декартовы координаты. Иногда же бывает удобно фиксировать положение точки при помощи других величин, например, связанных с решаемой задачей. Выяснением этих вопросов для общего случая мы и займёмся.

Пусть D, $D_1 \subseteq R^n$ — области, $r : D_1 \to D$ — отображение

$$x = r(u) = r(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ x_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{pmatrix}.$$

Если r — биективное (взаимно однозначное) отображение, то будем говорить, что задана криволинейная система координат, так как в этом случае положение точки $x \in D$ однозначно определяется точкой $u \in D_1$. Если вектор-функция r дифференцируема, то криволинейную систему координат будем называть регулярной. Заметим, что в этом случае, по теореме о производной обратной функции [1], обратное отображение, осуществляемое вектор-функцией r^{-1}, дифференцируемо.

Система вектор-функций $x = r(u) = r(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ при $u_l = \mathrm{const}$, $l = 1, 2, \ldots, n$, образует, как и в случае декартовых координат, систему координатных поверхностей. Пересечения координатных поверхностей образуют координатные поверхности меньшей размерности. В частности, при $n = 2$ отображение $r = r(u,v)$ задаёт криволинейную систему координат на плоскости, а кривые

$$(x, y)^T = r(u, C_2) = x(u, C_2)\mathbf{i} + y(u, C_2)\mathbf{j},$$

$$(x, y)^T = r(C_1, v) = x(C_1, v)\mathbf{i} + y(C_1, v)\mathbf{j}$$

образуют координатные линии. Аналогично при $n = 3$ отображение $r = r(u,v,w)$ задаёт криволинейную систему координат в пространстве R^3, поверхности

$$(x, y, z)^T = r(u, v, C_3) = x(u, v, C_3)\mathbf{i} + y(u, v, C_3)\mathbf{j} + z(u, v, C_3)\mathbf{k},$$

$$(x, y, z)^T = r(u, C_2, w) = x(u, C_2, w)\mathbf{i} + y(u, C_2, w)\mathbf{j} + z(u, C_2, w)\mathbf{k},$$

$$(x, y, z)^T = r(C_1, v, w) = x(C_1, v, w)\mathbf{i} + y(C_1, v, w)\mathbf{j} + z(C_1, v, w)\mathbf{k}$$

образуют координатные поверхности, а их пересечения, то есть кривые

$$(x, y, z)^T = r(u, C_2, C_3) = x(u, C_2, C_3)\mathbf{i} + y(u, C_2, C_3)\mathbf{j} + z(u, C_2, C_3)\mathbf{k},$$

$$(x, y, z)^T = r(C_1, v, C_3) = x(C_1, v, C_3)\mathbf{i} + y(C_1, v, C_3)\mathbf{j} + z(C_1, v, C_3)\mathbf{k},$$

$$(x, y, z)^T = r(C_1, C_2, w) = x(C_1, C_2, w)\mathbf{i} + y(C_1, C_2, w)\mathbf{j} + z(C_1, C_2, w)\mathbf{k},$$

образуют систему координатных линий.

Длины векторов r'_{u_l}, $l = 1, 2, \ldots, n$, то есть числа $h_i = \left|r'_{u_l}\right|$, $l = 1, 2, \ldots, n$, называются *коэффициентами Ламе* криволинейной системы координат. Если векторы r'_{u_l}, $l = 1, 2, \ldots, n$, попарно ортогональны, то криволинейная система координат называется ортогональной. В частности, криволинейная система координат на плоскости будет ортогональной, если перпендикулярны векторы $r'_u(u, v)$, $r'_v(u, v)$. Аналогично криволинейная система координат в R^3 будет ортогональной, если перпендикулярны векторы $r'_u(u, v, w)$, $r'_v(u, v, w)$, $r'_w(u, v, w)$. Коэффициенты Ламе на плоскости равны

$$h_u = \sqrt{(x'_u)^2 + (y'_u)^2},\ h_v = \sqrt{(x'_v)^2 + (y'_v)^2},$$

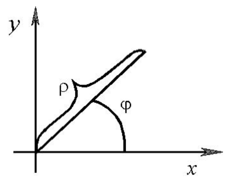
а в R^3 соответственно —

$$h_u = \sqrt{(x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2}, \quad h_v = \sqrt{(x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2},$$

$$h_w = \sqrt{(x'_w)^2 + (y'_w)^2 + (z'_w)^2}.$$

Заметим, что для ортогональной криволинейной системы координат модуль определителя матрицы Якоби r' (производной матрицы) [1, 2, 4] равен произведению коэффициентов Ламе.

3.3.2. Полярная система координат на плоскости



Наиболее часто используемой криволинейной системой координат на плоскости является полярная система координат. Положение точки в этой системе координат определяется длиной ρ радиус-вектора точки и углом φ между радиус-вектором точки и осью. Если в роли оси полярной системы взять ось OX, то в координатном виде переход от декартовых координат к полярным осуществляется по формулам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$. В векторной форме то же самое записывается в виде

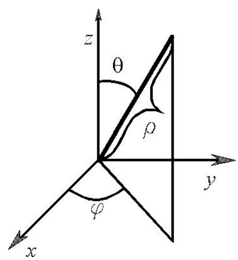
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} x(\rho,\varphi) \\ y(\rho,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \end{pmatrix} = (\rho\cos\varphi)\mathbf{i} + (\rho\sin\varphi)\mathbf{j}\,.$$

Угол φ при этом может быть выбран из любого полуинтервала длиной 2π. Чаще всего берут полуинтервалы $[0,2\pi)$, $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $[-\pi,\pi)$. Полярная система координат является ортогональной. Действительно, вычисляя скалярное произведение векторов

$$r'_\rho = (\cos\varphi,\sin\varphi)^T\,,\quad r'_\varphi = (-\rho\sin\varphi,\rho\cos\varphi)^T\,,$$

получаем требуемое. Коэффициенты Ламе для полярной системы координат равны $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$.

3.3.3. Сферическая и цилиндрическая системы координат в R^3



Возможны два обобщения полярной системы координат на случай пространства R^3. Первое из них называется сферической системой координат. Положение точки в этой системе координат определяется длиной ρ радиус-вектора точки, углом θ между радиус-вектором точки и осью OZ, углом φ между проекцией радиус-вектора точки на плоскость XOY и осью OX. Формулы перехода в координатной форме приобретают вид

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

При этом $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. В векторной форме то же самое записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r(\rho,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} x(\rho,\varphi,\theta) \\ y(\rho,\varphi,\theta) \\ z(\rho,\varphi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \rho\sin\varphi\sin\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} =$$
$$= (\rho\cos\varphi\sin\theta)\mathbf{i} + (\rho\sin\varphi\sin\theta)\mathbf{j} + \rho\cos\theta\mathbf{k}.$$

Сферическая система координат является ортогональной. Действительно, вычисляя скалярное произведение векторов

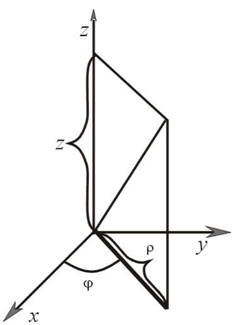
$$r'_\rho = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)^T,$$

$$r'_\varphi = (-\rho\sin\varphi\sin\theta, \ \ \rho\cos\varphi\sin\theta, 0)^T,$$

$$r'_\theta = (\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, -\rho\sin\theta)^T,$$

получаем требуемое. Коэффициенты Ламе для сферической системы координат равны $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho\sin\varphi$, $h_\theta = \rho$.

Второе обобщение полярной системы координат называется цилиндрической системой координат. Положение точки в этой системе координат определяется длиной ρ проекции радиус-вектора точки на плоскость XOY, углом φ между этой проекцией и осью OX, координатой z. Формулы перехода в координатной форме приобретают вид



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

При этом $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. В векторной форме то же самое записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \chi(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} x(\rho, \varphi, z) \\ y(\rho, \varphi, z) \\ z(\rho, \varphi, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} =$$
$$= (\rho\cos\varphi)\mathbf{i} + (\rho\sin\varphi)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Цилиндрическая система координат также ортогональна. Предлагается проверить это самим. Коэффициенты Ламе для цилиндрической системы координат равны $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$, $h_z = 1$.

3.3.4. **Замена переменных в интегралах**

Теорема 3.4. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция, заданная в области $D \subset R^n$, $r : D_1 \to D$ — биективное (осуществляющее взаимно однозначное соответствие) дифференцируемое отображение,

$$x = r(u) = r(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ x_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{pmatrix}.$$

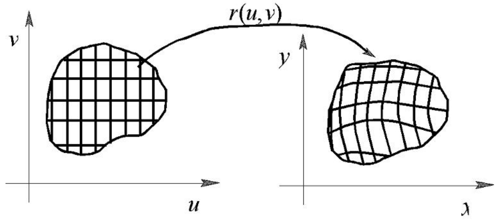
Тогда

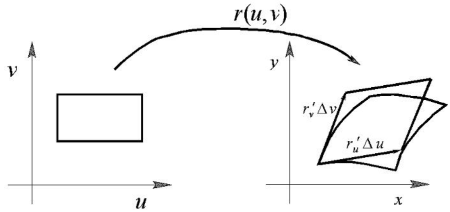
$$\int\limits_D f(x)\,dx = \int\limits_{D_1} f((u))\,\|r'(u)\|\,du,$$

где $\| r'(u) \|$ — модуль якобиана $|r'(u)|$ (определителя матрицы Якоби или, что то же самое, производной матрицы $r'(u)$).

Доказательство. Пусть $n = 2$. Тогда взаимно однозначное дифференцируемое отображение D_1 в D можно записать в виде $r = r(u,v) = (x(u,v), y(u,v))^T$. Разобьём область D_1 на части прямыми $u = u_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $v = v_l$, $l = 1, 2, \ldots, m$, параллельными координатным осям. Этому разбиению соответствует разбиение области D кривыми $r = r(u_k, v) = (x(u_k, v),\ y(u_k, v))^T$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $r = r(u, v_l) = (x(u, v_l),\ y(u, v_l))^T$, $l = 1, 2, \ldots, m$.

При этом прямоугольник D_{1kl} с вершинами (u_k, v_l), (u_{k+1}, v_l), (u_k, v_{l+1}), (u_{k+1}, v_{l+1}) перейдёт в криволинейный четырёхугольник D_{kl}, ограниченный линиями $r(u_k, v)$, $r(u, v_l)$, $r(u_{k+1}, v)$, $r(u, v_{l+1})$.





Пусть $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_l)$ — точка прямоугольника D_{1kl}, $\tilde{x}_{kl} = x(\tilde{u}_k, \tilde{v}_l)$, $\tilde{y}_{kl} = y(\tilde{u}_k, \tilde{v}_l)$. Рассмотрим интегральную сумму

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} f(\tilde{x}_{kl}, \tilde{y}_{kl}))\, \sigma(D_{kl})$$

для вычисления интеграла от функции f по области D, в которой $\sigma(D_{kl})$ — площадь четырёхугольника D_{kl}. Из геометрического смысла производной [3] следует, что вектор $r'_u(u_k, v_l)$ является касательным к кривой $r(u, v_l)$ в точке (u_k, v_l), а вектор $r'_v(u_k, v_l)$ будет касательным вектором кривой $r(u_k, v)$ в той же точке. Далее,

$$r(u_{k+1}, v_l) - r(u_k, v_l) = r'_u(\tilde{u}_k, v_l)\Delta u_k = r'_u(u_k, v_l)\Delta u_k + \alpha_1(\Delta u_k),$$

$$r(u_k, v_{l+1}) - r(u_k, v_l) = r'_v(u_k, \tilde{v}_l)\Delta v_l = r'_v(u_k, v_l)\Delta v_l + \alpha_2(\Delta v_l),$$

где $\alpha_1(\Delta u_k)$ и $\alpha_2(\Delta v_l)$ — бесконечно малые более высокого порядка малости, чем Δu_k и Δv_l. Можно показать, что площади криволинейного четырёхугольника D_{kl} и параллелограмма, построенного на векторах $r'_u(u_k, v_l)\Delta u_k = \begin{pmatrix} x'_u(u_k, v_l)\Delta u_k \\ y'_u(u_k, v_l)\Delta u_k \end{pmatrix}$,

$r'_v(u_k, v_l)\Delta v_l = \begin{pmatrix} x'_v(u_k, v_l)\Delta v_l \\ y'_v(u_k, v_l)\Delta v_l \end{pmatrix}$, отличаются на бесконечно малую более высокого порядка малости, чем $(\Delta u_k)^2 + (\Delta v_l)^2$. Заметим, что если $r(u, v)$ — линейное преобразование координат, то четырёхугольник D_{kl} совпадает с параллелограммом, построенным на векторах $r'_u(u_k, v_l)\Delta u_k$, $r'_v(u_k, v_l)\Delta v_l$. Поэтому заменим четырёхугольник D_{kl} указанным параллелограммом. Его площадь ΔS равна $\left|[r'_u(u_k, v_l), r'_v(u_k, v_l)]\right|\Delta u_k \Delta v_l$. Вычисляя $\left|[r'_u(u,v), r'_v(u,v)]\right|$, получаем

$$\left|[r'_u(u,v), r'_v(u,v)]\right| = \left\|\begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & 0 \\ x'_v & y'_v & 0 \end{matrix}\right\| = \left|\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}\mathbf{k}\right| =$$

$$= \left\|\begin{matrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{matrix}\right\| = \left|\det r'\right|.$$

Таким образом,

$$S \approx \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} f(x(\tilde{u}_k, \tilde{v}_l), y(\tilde{u}_k, \tilde{v}_l))\left|r'(u_k, v_l)\right|\Delta u_k \Delta v_l .$$

Переходя в последней сумме к пределу при увеличении числа разбиений, получаем вывод о справедливости теоремы 3.4 в случае $n = 2$. Для $n = 3$ доказательство аналогично, если заменить объём соответствующей элементарной области объёмом параллелепипеда, построенного на векторах

$$r'_u(u,v,w)\Delta u = \begin{pmatrix} x'_u(u,v,w)\Delta u \\ y'_u(u,v,w)\Delta u \\ z'_u(u,v,w)\Delta u \end{pmatrix}, \ r'_v(u,v,w)\Delta v = \begin{pmatrix} x'_v(u,v,w)\Delta v \\ y'_v(u,v,w)\Delta v \\ z'_v(u,v,w)\Delta v \end{pmatrix},$$

$$r'_w(u,v,w)\Delta w = \begin{pmatrix} x'_w(u,v,w)\Delta w \\ y'_w(u,v,w)\Delta w \\ z'_w(u,v,w)\Delta w \end{pmatrix},$$

который равен $\left|(r'_u(u,v,w), r'_v(u,v,w), r'_w(u,v,w))\right|\Delta u\,\Delta v\,\Delta w$ или, что то же самое, модулю определителя матрицы Якоби (модулю якобиана) $\left|\det r'\right|$ вектор-функции, отображающей R^3 в R^3, умноженному на объём $\Delta u \Delta v \Delta w$. В общем случае требуется замена меры n-мерной элементарной области на меру n-мерного параллелепипеда, которая равна модулю определителя матрицы Якоби (модулю определителя производной матрицы), умноженному на объём элементарной области в новых переменных. Теорема доказана.

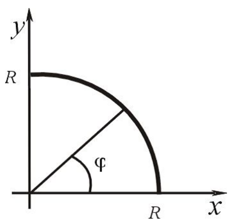
Заметим, что для ортогональной системы координат на плоскости $dS = h_u h_v \, du\, dv$, где h_u и h_v — коэффициенты Ламе. Аналогично в R^3 $dV = h_u h_v h_w \, du\, dv\, dw$.

Для полярной системы координат на плоскости матрица Якоби равна

$$r'(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $|r'|$ равен ρ, поэтому модуль Якобиана $\|r'\|$ тоже равен ρ, и формула перехода к полярным координатам в двойном интеграле приобретает вид

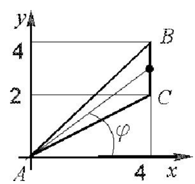
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi.$$



П р и м е р 1. В интеграле $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy$ перейдём к полярным координатам. Так как область интегрирования есть четверть круга радиуса R, лежащая в первом квадранте, то

$$\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^R \rho\, d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\varphi.$$

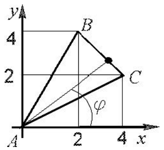
П р и м е р 2. Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(4,4,)$, $C(4,2)$. В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в нём.



Уравнения прямых AB, AC и BC — $y = x$, $y = 0{,}5x$ и $x = 4$ соответственно. Поэтому угол φ между радиус-вектором точки, принадлежащей треугольнику ABC, и осью OX меняется в пределах $\operatorname{arctg}0,5 \le \varphi \le \operatorname{arctg}1 = \pi/4$. Уравнение прямой $x = 4$ в полярных координатах переписывается в виде $\rho\cos\varphi = 4$ или, что то же самое, $\rho = 4/\cos\varphi$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\operatorname{arctg}0,5}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\frac{4}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,.$$

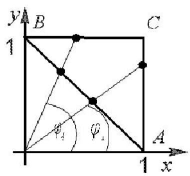
П р и м е р 3. Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами A(0,0), B(2,4), C(4,2). В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к



полярным координатам и расставить пределы интегрирования в нём.

Уравнения прямых AC, AB и BC — $y = 2x$, $y = 0,5x$ и $x + y = 6$ соответственно. Поэтому угол φ между радиус-вектором точки, принадлежащей треугольнику ABC, и осью OX меняется в пределах $\operatorname{arctg}0,5 < \varphi < \operatorname{arctg}2$. Уравнение прямой $x + y = 6$ в полярных координатах переписывается в виде $\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi = 6$ или, что то же самое, $\rho = \dfrac{6}{\cos\varphi + \sin\varphi}$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\operatorname{arctg}0,5}^{\operatorname{arctg}2} d\varphi \int\limits_0^{\frac{6}{\cos\varphi+\sin\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho\,.$$

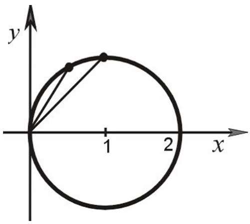


П р и м е р 4. Пусть область D — внутренность треугольника с вершинами A(1,0), B(0,1), C(1,1). В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в нём.

Уравнения прямых AB, AC и BC есть $x + y = 1$, $x = 1$ и $y = 1$ соответственно. Уравнение прямой $x + y = 1$ в полярных координатах имеет вид $\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi = 1$ или, выражая ρ через φ, $\rho = \dfrac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}$, уравнение прямой $x = 1$ имеет вид $\rho\cos\varphi = 1$, или $\rho = \dfrac{1}{\cos\varphi}$, а уравнение прямой $y = 1$ переписывается в виде $\rho\sin\varphi = 1$ или, что то же самое,

$\rho = \dfrac{1}{\sin\varphi}$. С учётом того, что при изменении угла φ в пределах $0 \le \varphi \le \pi/4$ и $\pi/4 \le \varphi \le \pi/2$ длина радиус-вектора точки, принадлежащей треугольнику ABC, меняется в разных пределах, имеем

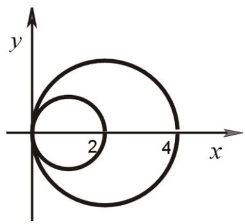
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho.$$



Пример 5. Пусть область D — внутренность круга с центром в точке $A(1,0)$ и радиуса 1. В интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в нём.

Уравнение данной окружности в декартовых координатах записывается в виде $(x-1)^2 + y^2 = 1$ или, после преобразований, $x^2 + y^2 = 2x$. Переходя к полярным координатам, получаем для этой окружности уравнение $\rho = 2\cos\varphi$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,.$$



Пример 6. Пусть область D задана неравенствами $x^2 + y^2 \le 4x$, $x^2 + y^2 \ge 2x$. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$.

Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4x$ в полярных координатах имеет вид $\rho = 4\cos\varphi$, а окружности $x^2 + y^2 = 2x$ имеет вид $\rho = 2\cos\varphi$. Поэтому

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,.$$

Для сферической системы координат матрица Якоби $r'(\rho,\varphi,\theta)$ равна

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $|r'|$ равен $-\rho^2\sin\theta$, поэтому модуль Якобиана $\|r'\|$ равен $\rho^2\sin\theta$, и формула перехода к сферическим координатам в тройном интеграле приобретает вид

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Для цилиндрической системы координат матрица Якоби $r'(\rho,\varphi,z)$ равна

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы $|r'|$ равен ρ, поэтому модуль Якобиана $\|r'\|$ также равен ρ, и формула перехода к цилиндрическим координатам в тройном интеграле приобретает вид

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz\ .$$

П р и м е р 7. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz\ ,$$

перейдя к сферической системе координат.

Область интегрирования есть верхняя половина шара с центром в начале координат и радиуса R. Поэтому $0 \le \rho \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi/2$. Далее, $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\theta$. Следовательно,

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho^2 \sin^2\theta)\,\rho^2 \sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{15} R^5.$$

П р и м е р 8. Вычислить интеграл $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz$, перейдя к цилиндрической системе координат.

Область интегрирования есть половина кругового цилиндра радиуса 1, лежащая в полупространстве $x \ge 0$. Поэтому $0 \le \rho \le 1$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le z \le a$. Следовательно,

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz = \int_0^1 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \rho\, dz = \frac{a\pi}{2}.$$

Задание 3.3

В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования, если область D задана неравенствами:

1) $1 \le x^2 + y^2 \le 4$, $y \ge x$, $y \le 3x$; **2)** $y \ge x$, $y \le \sqrt{3}x$, $y \le 3$;

3) $y \ge x$, $y \le \sqrt{3}x$, $x + y \le 3$; **4)** $x - 2y \ge 4$, $x \le 4$, $y \ge -2$;

5) $x^2 + y^2 \le 4y$; **6)** $2y \le x^2 + y^2 \le 4y$;

7) $x \ge |y|$, $x^2 + y^2 \le 2x$; **8)** $y \ge |x|$, $x^2 + y^2 \le 2y$.

В тройном интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ перейти к сферическим или цилиндрическим координатам и расставить пределы интегрирования, если область D задана неравенствами:

9) $x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0,\ \ 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$;

10) $x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0,\ \ z \le 4 - x^2 - y^2$;

11) $x^2 + y^2 \le 4,\ \ x^2 + y^2 \le 8z,\ \ z \le 6$;

12) $x^2 + y^2 \le 4,\ \ x^2 + y^2 \ge 8z,\ \ z \ge 0$.

Ответы:

1) $\int\limits_1^2 d\rho \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 3} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\varphi$;

2) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{3}{\sin\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{3}{\cos\varphi+\sin\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho$;

4) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\operatorname{arctg}(0{,}5)} d\varphi \int\limits_{\frac{4}{\cos\varphi-2\sin\varphi}}^{\frac{-2}{\sin\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho +$

$+ \int\limits_{-\operatorname{arctg}(0{,}5)}^{0} d\varphi \int\limits_{\frac{4}{\cos\varphi-2\sin\varphi}}^{\frac{4}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho$;

5) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{4\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho$;

6) $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho$;

7) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho$;

8) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{2\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho$;

9) сферические координаты,

$\int\limits_{2}^{3} d\rho \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\, d\theta$;

10) цилиндрические координаты,

$\int\limits_{0}^{2} d\rho \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{4-\rho^2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\, dz$;

11) цилиндрические координаты,

$\int\limits_{0}^{2} d\rho \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\rho^2}{8}}^{6} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\, dz$;

12) цилиндрические координаты,

$\int\limits_{0}^{2} d\rho \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{\rho^2}{8}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\, dz$.

3.4. Приложения кратных интегралов

3.4.1. Вычисление площадей плоских фигур

Из определения двойного интеграла следует, что площадь $S(D)$ плоской области D выражается формулой $S(D) = \iint\limits_{D} dx\, dy$.

Если область D есть криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = a$, $y = b$, $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, и для $\forall x \in [a, b]$ $y_1(x) \le y_2(x)$, то

$$S(D) = \iint\limits_{D} dx\, dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = \int\limits_{a}^{b} (y_2(x) - y_1(x))\, dx$$

— формула площади области D, полученная нами в п. 2.7.1.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$. Имеем $S = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{5x} dy = \int\limits_0^1 (5x - x)\,dx = \left.\dfrac{4x^2}{2}\right|_0^1 = 2.$

3.4.2. **Вычисление объёмов тел**

Из определения тройного интеграла следует, что объём $V(G)$ пространственной области G выражается формулой

$$V(G) = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz\,.$$

Если G — цилиндр с образующими, параллельными оси OZ, направляющей, лежащей в плоскости XOY и являющейся границей области D, ограниченный поверхностями $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, такими, что $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$ для $\forall (x, y) \in D$, то

$$V(G) = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz = \iint\limits_D (z_2(x, y) - z_1(x, y))\,dx\,dy.$$

Пример. Найти объём области, ограниченной поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 3$, $z = x^2 + y^2 + 1$. Данная область является цилиндром, проекция которого на плоскость XOY есть прямоугольник с границей $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, $y = 3$, одновременно являющейся направляющей цилиндра. Сверху и снизу цилиндр ограничен поверхностями $z = 0$, $z = x^2 + y^2 + 1$. Поэтому

$$V(G) = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{x^2+y^2+1} dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^3 (x^2 + y^2 + 1)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^4 \left.\left(x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right)\right|_0^3 dx = \int\limits_0^4 (3x^2 + 12)\,dx = \left.(x^3 + 12x)\right|_0^4 = 112.$$

3.4.3. **Вычисление площади поверхности**

Пусть поверхность задана параметрически $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$ $(u,v) \in D$ или в векторной форме

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = r(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}\,.$$

Рассмотрим кусок поверхности, ограниченный линиями $r = r(u,v_0)$, $r = r(u_0,v)$, $r = r(u,v_0+\Delta v)$, $r = r(u_0+\Delta u,v)$. Из геометрического смысла производной [3] следует, что вектор $r'_u(u_0,v_0)$ является касательным к кривой $r(u,v_0)$ в точке (u_0,v_0), а вектор $r'_v(u_0,v_0)$ будет касательным вектором кривой $r(u_0,v)$ в той же точке. Далее,

$$r(u_0+\Delta u,v_0) - r(u_0,v_0) = r'_u(\tilde{u}_0,v_0)\Delta u = r'_u(u_0,v_0)\Delta u + \alpha_1(\Delta u),$$

$$r(u_0,v_0+\Delta v) - r(u_0,v_0) = r'_v(u_0,\tilde{v}_0)\Delta v = r'_v(u_0,v_0)\Delta v + \alpha_2(\Delta v),$$

где $\alpha_1(\Delta u)$ и $\alpha_2(\Delta v)$ — бесконечно малые более высокого порядка малости, чем Δu и Δv. Можно показать, что площади криволинейного четырёхугольника D_{kl} и параллелограмма, лежащего в касательной плоскости и построенного на векторах

$$r'_u(u,v)\Delta u = \begin{pmatrix} x'_u(u,v)\Delta u \\ y'_u(u,v)\Delta u \\ z'_u(u,v)\Delta u \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad r'_v(u,v)\Delta v = \begin{pmatrix} x'_v(u,v)\Delta v \\ y'_v(u,v)\Delta v \\ z'_v(u,v)\Delta v \end{pmatrix},$$

отличаются на бесконечно малую более высокого порядка малости, чем $(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2$. Поэтому заменим четырёхугольник D_{kl} указанным параллелограммом. Площадь ΔS этого параллелограмма равна $\left|[r'_u(u,v), r'_v(u,v)]\right|\Delta u\Delta v$. Проводя построения, аналогичные построениям в определении двойного интеграла, получаем, что площадь поверхности равна

$$S = \iint\limits_D \left|[r'_u(u,v), r'_v(u,v)]\right| du\,dv\,.$$

Пусть поверхность задана явно уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. Всякую такую поверхность можно задать параметрически (взяв в качестве параметров x, y) или в векторной форме уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$. Тогда

$$r'_x(x, y) = \mathbf{i} + f'_x(x, y)\mathbf{k}, \quad r'_y(x, y) = \mathbf{j} + f'_y(x, y)\mathbf{k},$$

$$[r'_x(x, y), r'_y(x, y)] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x, y) \\ 0 & 1 & f'_y(x, y) \end{vmatrix} = -f'_x(x, y)\mathbf{i} - f'_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Поэтому $\left|[r'_x(x, y), r'_y(x, y)]\right| = \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}$, и площадь поверхности может быть найдена по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}\, dx\, dy.$$

Пример 1. Вычислить площадь поверхности $z = x^2 + y^2$, $(x, y) \in D$, если область D задаётся неравенством $x^2 + y^2 \le 16$.

Так как $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$, то, подставляя в формулу площади поверхности, имеем $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy$. Переходя к полярным координатам, получаем

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{12}(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(65)^{\frac{3}{2}} - 1}{12}\, d\varphi = \pi \frac{65\sqrt{65} - 1}{6}.$$

Пример 2. Вычислить площадь поверхности сферы.

Параметрическое уравнение сферы радиуса R можно записать в виде $x = R\cos\varphi\sin\theta$, $y = R\sin\varphi\sin\theta$, $z = R\cos\theta$, где $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$ или, что то же самое, в векторной форме

$$\mathbf{r} = (R\cos\varphi\sin\theta)\mathbf{i} + (R\sin\varphi\sin\theta)\mathbf{j} + R\cos\theta\mathbf{k}.$$

Тогда

$$r'_\varphi = (-R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi\sin\theta, 0)^T ,$$

$$r'_\theta = (R\cos\varphi\cos\theta,\ R\sin\varphi\cos\theta,\ -R\sin\theta)^T .$$

Поэтому

$$[r'_\varphi, r'_\theta] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\cos\theta & -R\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -R^2\sin^2\theta\cos\varphi\mathbf{i} - R^2\sin^2\theta\sin\varphi\mathbf{j} - R^2\cos\theta\sin\theta\mathbf{k}.$$

Вычисляя модуль этого вектора, получаем $\left|[r'_\varphi,\quad r'_\theta]\right| = R^2\sin\theta$. Поэтому $S = \iint\limits_D \left|[r'_\varphi(\varphi,\theta), r'_\theta(\varphi,\theta)]\right| d\varphi\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} R^2\sin\theta\, d\theta = 4\pi R^2$.

4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

4.1. Кривые на плоскости и в пространстве

Рассмотрим вектор-функцию одного аргумента

$$\mathrm{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=(x(t),y(t),z(t))^T=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k},$$

где **i**, **j**, **k** — векторы декартова базиса. В случае плоскости эта запись приобретает вид $\mathrm{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$. Если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны при $t\in[\alpha,\beta]$ и начала всех векторов $\mathrm{r}(t)$ поместить в начало координат, то их концы опишут в R^3 некоторую кривую, называемую годографом вектор-функции $\mathrm{r}(t)$, а вектор-функцию $\mathrm{r}(t)$ называют векторным представлением этой кривой. Эта функция широко используется в физике для описания движения материальной точки M, так как, чтобы знать положение точки в момент времени t, необходимо указать координаты этой точки как функции времени, т.е. задать ее в виде $M(x(t),y(t),z(t))$. Например функция

$$\mathrm{r}(t)=a\cos t\mathbf{i}+a\sin t\mathbf{j}+bt\mathbf{k}$$

определяет движение точки по винтовой линии, а функция

$$\mathrm{r}(t)=a\cos t\mathbf{i}+a\sin t\mathbf{j}$$

— движение точки по окружности. Зафиксировав момент времени $t=t_0$, мы найдем положение точки в этот момент.

Кривую $\mathrm{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ назовем гладкой на $[\alpha,\beta]$, если существует $\mathrm{r}'(t)$ и $\mathrm{r}'(t)\neq 0$ для всех $t\in[\alpha,\beta]$. Непрерывную кривую назовем кусочно-гладкой на $[\alpha,\beta]$, если отрезок $[\alpha,\beta]$ можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых кривая гладкая.

Кривую будем обозначать одной из букв Γ,γ,L. Будем говорить, что кривая замкнута, если $\mathrm{r}(\alpha)=\mathrm{r}(\beta)$. Если существуют значения $t_1,t_2\in(\alpha,\beta)$ параметра такие, что $\mathrm{r}(t_1)=\mathrm{r}(t_2)$, то кривая имеет самопересечения, если таких значений t_1, t_2 нет, то кривая без самопересечений.

Будем говорить, что кривая ориентирована, если задан порядок следования точек по этой кривой при возрастании параметра от α к β. Ориентацию кривой можно сменить, введя новый параметр, например, по формуле $\tau = \beta + \alpha - t$. Замкнутую кривую на плоскости ориентируют обычно так, чтобы при обходе кривой против часовой стрелки область, ограничиваемая этой кривой, оставалась слева.

Для гладкой кривой ориентация определяется естественным образом — выбором единичного направляющего вектора касательной, так как в этом случае имеет место следующий результат.

> **Теорема 4.1.** В каждой точке гладкой кривой существует касательная. Производная $r'(t)$ направлена по этой касательной в сторону возрастания параметра.

Доказательство можно найти в [1, 3].

4.2. **Поверхности в пространстве**

Рассмотрим вектор-функцию двух аргументов

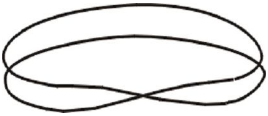
$$r(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T =$$
$$= x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — векторы декартова базиса. Если функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ непрерывны и начала всех векторов $r(u,v)$ поместить в начало координат, то их концы опишут в R^3 некоторую поверхность, называемую годографом вектор-функции $r(u,v)$, а вектор-функцию $r(u,v)$ называют векторным представлением этой поверхности. Поверхность будем обозначать одной из букв S, σ.

Поверхность назовем гладкой, если существуют непрерывные производные r'_u, r'_v и $[r'_u, r'_v] \neq 0$. Непрерывную поверхность назовём кусочно-гладкой, если её можно разбить на конечное число поверхностей, каждая из которых гладкая.

Фиксируя v, получаем кривую $r(u,v_0)$, и вектор r'_u направлен по касательной к этой кривой. Аналогично r'_v направлен по касательной к кривой $r(u_0,v)$ при фиксированном u.

Поэтому r'_u и r'_v лежат в касательной плоскости к $r(u,v)$ (если она существует). Тогда $n = \pm[r'_u, r'_v]$ — вектор нормали к поверхности $r(u,v)$. Фиксируя направление нормали $\pm n$, фиксируем ориентацию поверхности.



Назовём поверхность двухсторонней, если нельзя перейти по поверхности непрерывным образом из точки в ту же точку, но с противоположным направлением нормали. В противном случае поверхность назовем односторонней. Классическим примером односторонней поверхности является лист Мёбиуса. Модель листа Мёбиуса можно получить, если склеить полоску бумаги, предварительно повернув одну из коротких сторон на 180°. Мы будем иметь дело с двухсторонними поверхностями.

4.3. Криволинейные и поверхностные интегралы первого рода

Кривую или поверхность будем называть многообразием.

Определение. Пусть задано непрерывное кусочно-гладкое многообразие σ и на σ — функция $F(x,y,z)$. Разобьем σ на части многообразиями меньшей размерности (кривую — точками, поверхность — кривыми) и внутри каждого полученного элементарного многообразия выберем по точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, …, $M_n(x_n,y_n,z_n)$. Посчитаем значения функции в этих точках, умножим эти значения на меру данного элементарного многообразия (длину или площадь соответствующего участка многообразия) и просуммируем. Предел полученных сумм, если он существует, не зависит от способа разбиения многообразия на части и выбора точек внутри каждого элементарного многообразия, при условии, что диаметр элементарного участка стремится к нулю, называется интегралом по многообразию (криволинейным интегралом, если σ — кривая, и поверхностным, если σ – поверхность) первого рода и обозначается в общем случае $\int\limits_{\sigma} F(x,y,z)\,d\sigma$, в случаях криволинейного и поверхностного интегралов $\int\limits_{L} F(x,y,z)\,dl$, $\iint\limits_{S} F(x,y,z)\,dS$ соответственно.

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t), z(t))^{T} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

$t \in [\alpha,\beta]$, то $dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt$, и поэтому криволинейный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\int\limits_{L} F(x,y,z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt .$$

В случае плоской кривой

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t))^{T} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \left(t \in [\alpha,\beta]\right)$$

эта формула приобретает вид

$$\int\limits_{L} F(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(x(t),y(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt .$$

Пусть плоская кривая задана явно уравнением $y = f(x)$, $x \in [a,b]$. Всякую такую кривую можно считать заданной параметрически $\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$ взяв в качестве параметра x. Тогда последняя формула приобретает вид

$$\int\limits_{L} F(x,y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} F(x,f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx .$$

Для поверхности, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^T =$$
$$= x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D,$$

$dS = |\,[r'_u, r'_v]\,|\,du\,dv$, и поэтому поверхностный интеграл первого рода вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\left|\,[r_u', r_v']\,\right| du\,dv.$$

Если поверхность задана явно уравнением $z = \varphi(x,y)$, то $dS = \sqrt{1 + (\varphi'_x(x,y))^2 + (\varphi'_y(x,y))^2}\,dx\,dy$, и последняя формула приобретает вид

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_D F(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}\,dx\,dy,$$

где D — проекция поверхности S на плоскость XOY.

Теорема 4.2. Величина криволинейного (поверхностного) интеграла первого рода не изменяется при изменении ориентации кривой (поверхности), то есть

$$\int\limits_{\sigma} F(x,y,z)\,d\sigma = \int\limits_{\sigma-} F(x,y,z)\,d\sigma.$$

Доказательство. Докажем теорему 4.2 для криволинейного интеграла и кривой, заданной параметрически. Введем новый параметр τ по формуле $t = t(\tau) = b + a - \tau$. Тогда

$$r(t) = r(b + a - \tau) = x(b + a - \tau)\mathbf{i} + y(b + a - \tau)\mathbf{j} + z(b + a - \tau)\mathbf{k}.$$

Заметим, что когда τ движется от a к b, то t движется от b к a, и наоборот. При этом $dt = -d\tau$, и кривая обходится в противоположном направлении. Поэтому

$$\int\limits_{\gamma^-} F(x,y,z)dl = \int\limits_a^b F(x(t(\tau)), y(t(\tau)), z(t(\tau)))\left\|r'(t(\tau))\right\| d\tau =$$

$$= -\int\limits_b^a F(x(t), y(t), z(t))\left\|r'(t)\right\| dt = \int\limits_\gamma F(x,y,z)dl,$$

где $\left\|r'(t(\tau))\right\| = \sqrt{(x'(t(\tau)))^2 + (y'(t(\tau)))^2 + (z'(t(\tau)))^2}$,

$\left\|r'(t)\right\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ — норма (длина) векторов $r'(t(\tau))$ и $r'(t)$ соответственно. Теорема доказана.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_\gamma y dl$, где а) γ — парабола $y = 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$; б) γ — прямая, соединяющая точки (0, 0) и (1, 1).

$$\text{а)} \int\limits_\gamma y dl = \int\limits_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{1 + (\ (2\sqrt{x})'\ )^2}\, dx = \int\limits_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 2\sqrt{x+1}\, dx = \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

$$\text{б)} \int\limits_\gamma y dl = \int\limits_0^1 x\sqrt{1 + (1)^2} dx = \sqrt{2}\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_\gamma \sqrt{x^2 + y^2} dl$ вдоль кривой $\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = a\cos t, \end{cases}$ если $t \in [0, \pi]$.

Имеем

$$\int\limits_\gamma \sqrt{x^2 + y^2} dl = \int\limits_0^\pi a\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\, dt = \int\limits_0^\pi a^2 dt = a^2\pi.$$

Пример 3. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dS,$$

если поверхность S есть часть плоскости $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, лежащая в первом октанте.

Эта поверхность задаётся явно уравнением $z = 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)$.

Тогда $z'_x = -2$, $z'_y = -\frac{4}{3}$, $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \frac{\sqrt{61}}{3}$. Проекция поверхности на плоскость XOY есть треугольник D, ограниченный кривыми $x = 0$, $y = 0$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$. Поэтому

$$\iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right)dS = \iint_D \left(4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) + 2x + \frac{4}{3}y\right)\frac{\sqrt{61}}{3}\,dxdy =$$

$$= \frac{4\sqrt{61}}{3}\int_0^2 dx \int_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)} dy = \frac{4\sqrt{61}}{3}\int_0^2 3\left(1-\frac{x}{2}\right)dx = 4\sqrt{61}\left(x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 4\sqrt{61}.$$

Задание 4.1

1. Вычислить $\int_\gamma \left(x + \sqrt{y}\right)dl$: **а)** вдоль кривой $y = x^2$, $0 \le x \le 2$; **б)** вдоль прямой, соединяющей точки $A(2,1,3)$, $B(3,4,7)$.

2. Вычислить $\int_\gamma (x + y)\,dl$ вдоль прямой, соединяющей точки $A(1,2,1)$, $B(4,4,3)$.

3. Вычислить $\int_\gamma x^2 y\,dl$ вдоль кривой $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $\pi \le t \le 2\pi$.

4. Вычислить поверхностный интеграл $\iint_S (6z - 2x + y)\,dS$, если поверхность S есть часть плоскости $2x - 3y + 6z = 12$, лежащая в части пространства $x \ge 0$, $y \le 0$, $z \ge 0$.

Ответы: **1. а)** $\frac{17\sqrt{17}-1}{6}$, **б)** $\frac{73\sqrt{26}}{18}$; **2.** $\frac{11\sqrt{17}}{2}$; **3.** $-\frac{32}{3}$; **4.** -352.

4.4. Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода

4.4.1. Определение

Рассмотрим многообразие σ. Пусть $\tau(x,y,z)$ — единичный вектор касательной к σ в точке (x,y,z), если σ — кривая, а $n(x,y,z)$ — единичный вектор нормали к σ в точке (x,y,z), если σ — поверхность в R^3. Рассмотрим элементарный участок σ и выберем точку на нём. Введём векторы $\overline{dl} = \tau dl$ и $\overline{dS} = n\,dS$, где dl и dS — длина и площадь соответствующего участка кривой или поверхности, а τ и n вычислены в выбранной точке. Будем считать, что $\overline{d\sigma} = \overline{dl}$, если σ — кривая, и $\overline{d\sigma} = \overline{dS}$, если σ — поверхность. Назовём $\overline{d\sigma}$ ориентированной мерой соответствующего участка кривой или поверхности.

Определение. Пусть заданы ориентированное непрерывное кусочно-гладкое многообразие σ и на σ — вектор-функция $F(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$. Разобьем многообразие на части многообразиями меньшей размерности (кривую — точками, поверхность — кривыми), внутри каждого полученного элементарного многообразия выберем по точке $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, ..., $M_n(x_n,y_n,z_n)$. Посчитаем значения $F(x_i,y_i,z_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, вектор-функции в этих точках, умножим скалярно эти значения на ориентированную меру $\overline{d\sigma_i}$ данного элементарного многообразия (ориентированные длину или площадь соответствующего участка многообразия) и просуммируем. Предел полученных сумм

$$\sum_{i=1}^{n} (F(x_i, y_i, z_i), \overline{d\sigma_i}),$$

если он существует, не зависит от способа разбиения многообразия на части и выбора точек внутри каждого элементарного многообразия, при условии, что диаметр элементарного участка стремится к нулю, называется интегралом по многообразию (криволинейным интегралом, если σ — кривая и поверхностным, если σ — поверхность) второго рода, интегралом вдоль ориентированного многообразия, или интегралом от вектора F вдоль σ, и обозначается в общем случае $\int\limits_{\sigma}(F(x,y,z),\overline{d\sigma})$, в случаях криволинейного и поверхностного интегралов

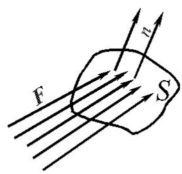
$$\int\limits_{L}(F(x,y,z),\overline{dl}),\quad \iint\limits_{S}(F(x,y,z),\overline{dS})$$

соответственно.

4.4.2. **Физический смысл**

Пусть $\bar{F}(x,y,z)$ — сила, действующая на материальную точку, движущуюся под действием этой силы по кривой l. Тогда $(\bar{F},\overline{dl})$ — работа, затраченная на перемещение точки по кривой на участке dl.

Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу, получаем, что $\int\limits_{\gamma}(\bar{F}(x,y,z),\overline{dl})$ — работа этой силы по перемещению материальной точки вдоль кривой. *Если кривая* L *замкнута, то работа по перемещению точки вдоль* L *называется циркуляцией.*



Пусть теперь $F(x,y,z)$ — стационарное (не зависящее от времени) поле скоростей текущей жидкости, S — поверхность, через которую течёт эта жидкость. Тогда $(F,\overline{dS})$ — объём жидкости, протекающей через dS в единицу времени. Суммируя по всем участкам разбиения и переходя к пределу, получаем, что $\iint\limits_{S}(F(x,y,z),\overline{dS})$ — количество жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени (поток вектора через поверхность).

4.4.3. **Вычисление и свойства**

Пусть кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t), z(t))^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Тогда вектор касательной приобретает вид $r'(t) = (x'_t, y'_t, z'_t)^T$, а единичный вектор касательной $\tau = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ равен

$$\left(\frac{x'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}, \frac{y'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}}, \frac{z'_t}{\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}} \right)^T.$$

Так как $dl = \|r'(t)\| dt = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt$, то $\overline{dl} = \tau dl =$ $= \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \|r'(t)\| dt = r'(t) dt = (x'_t dt, y'_t dt, z'_t dt)^T$, и для криволинейного интеграла второго рода имеем

$$\int_\gamma \left(F(x,y,z), \overline{dl}\right) = \int_\gamma \left(P\left(x(t), y(t), z(t)\right) x'(t) + \right.$$
$$\left. + Q\left(x(t), y(t), z(t)\right) y'(t) + R\left(x(t), y(t), z(t)\right) z'(t)\right) dt =$$
$$= \int_\gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

В случае плоской кривой

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (x(t), y(t))^T = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

получим

$$\int_\gamma \left(F(x,y,z), \overline{dl}\right) = \int_\gamma \left(P\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right) y'(t)\right) dt =$$
$$= \int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Если плоская кривая задана явно уравнением $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, то её можно считать заданной параметрически $\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$ взяв в качестве параметра x. Тогда последняя формула приобретает вид

$$\int\limits_{\gamma} \left(F(x,y,z), \overline{dl}\right) = \int\limits_{a}^{b} P\left(x, f(x)\right)dx + Q\left(x, f(x)\right)f'(x)\,dx .$$

Заметим, что все формулы для вычисления криволинейного интеграла второго рода получены при соглашении, что направлением обхода кривой считается направление, задаваемое вектором касательной $r'(t)$, если кривая задана параметрически или векторно, и вектором касательной $(1, f'(x))^T$, если кривая задана явно. Если по каким-либо соображениям обходить кривую необходимо в обратном направлении, то все знаки в формулах нужно поменять на противоположные.

Если поверхность задана параметрически $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases}$ или, что то же самое, в векторной форме

$$r(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D,$$

то при задании стороны поверхности с помощью вектора нормали $[r_u', r_v']$ единичный вектор нормали равен $n = \dfrac{[r_u', r_v']}{\left\|[r_u', r_v']\right\|}$, и так как $dS = \left\|[r_u', r_v']\right\| du\,dv$, то

$$\overline{dS} = n\,dS = [r_u', r_v']dudv = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} dudv =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_u' & z_u' \\ x_v' & z_v' \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) dudv =$$

$$= \left(\left| \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' \right| \mathbf{i} - \left| \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}' \right| \mathbf{j} + \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' \right| \mathbf{k} \right) dudv,$$

где $\left|\begin{pmatrix} y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}'\right| = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}$, $\left|\begin{pmatrix} x(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}'\right| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}$, $\left|\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}'\right| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$

— якобианы (определители матриц Якоби или, что то же самое, матриц производных) [1, 3, 4] вектор-функций

$$\begin{pmatrix} y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

соответственно. Тогда для вычисления поверхностного интеграла второго рода получаем формулу

$$\iint\limits_S \left(F(x,y,z), \overline{dS}\right) = \iint\limits_D \left(P\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right) \left|\begin{pmatrix} y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}'\right| - \right.$$

$$- Q\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right) \left|\begin{pmatrix} x(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}'\right| +$$

$$\left. + R\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right) \left|\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}'\right| \right) du dv.$$

Пусть поверхность S задана явно уравнением $z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in D$. Тогда, если в качестве параметров взять x, y, её можно считать заданной в векторной форме $r(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \varphi(x,y)\mathbf{k}$,

$(x,y) \in D$ или, что то же самое, параметрически $\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = \varphi(x,y). \end{cases}$

Тогда $r'_x = (1, 0, \varphi'_x(x,y))^T$, $r'_y = (0, 1, \varphi'_y(x,y))^T$, $[r'_x, r'_y] = -\varphi'_x(x,y)\mathbf{i} - \varphi'_y(x,y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$, и поверхностный интеграл второго рода вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S \left(F(x,y,z), \overline{dS}\right) = \iint\limits_D \left(-P(x,y,\varphi)\,\varphi'_x - Q(x,y,\varphi)\,\varphi'_y + R(x,y,\varphi)\right) dx\, dy,$$

в которой $\varphi = \varphi(x,y)$, $\varphi'_x = \varphi'_x(x,y)$, $\varphi'_y = \varphi'_y(x,y)$, а D есть проекция поверхности S на плоскость XOY. Получить аналогичные формулы в случае, когда поверхность задана явно одним из уравнений $y = \varphi(x,z)$ или $x = \varphi(y,z)$, предлагается читателю.

Напомним, что мы получили формулы для вычисления поверхностного интеграла второго рода при ориентации поверхности с помощью вектора нормали $n = [r'_u, r'_v]$. При необходимости выбора другой стороны поверхности все знаки в формулах поменяются на противоположные.

Рассмотрим теперь более подробно интегральную сумму, используемую в определении поверхностного интеграла второго рода. Для удобства записи введём обозначения

$$P_l = P(x_l, y_l, z_l), \quad Q_l = Q(x_l, y_l, z_l), \quad R_l = R(x_l, y_l, z_l).$$

Имеем

$$\sum_{l=1}^{n}\left(F(x_l, y_l, z_l), \overline{dS_l}\right) = \sum_{l=1}^{n}\left((P_l, Q_l, R_l), \overline{dS_l}\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\left((P_l, Q_l, R_l), n(x_l, y_l, z_l)\right) dS_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\left(P_l \cos\alpha_l dS_l + Q_l \cos\beta_l dS_l + R_l \cos\gamma_l dS_l\right),$$

где $\cos\alpha_l$, $\cos\beta_l$, $\cos\gamma_l$ — направляющие косинусы (координаты) единичного вектора нормали $n(x_l, y_l, z_l)$, dS_l — площадь элементарного участка S_l поверхности S. Рассмотрим проекцию элементарного участка S_l поверхности на одну из координатных плоскостей, например на плоскость XOY. Площадь ΔD_{3l} этой проекции равна $\Delta D_{3l} = \pm dS_l \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостью XOY и касательной плоскостью к поверхности в точке (x_l, y_l, z_l). Знак плюс берётся, если этот угол острый, и минус, если этот угол тупой. По определению угла между плоскостями этот угол совпадает с углом между нормальными векторами этих плоскостей, то есть с углом γ_l между векторами $n(x_l, y_l, z_l)$ и $\mathbf{k}$. Таким образом, $dS_l \cos\gamma_l = \pm\Delta D_{3l}$. Обозначив через ΔD_{1l} площадь проекции S_l на плоскость YOZ, а через ΔD_{2l} площадь проекции S_l на плоскость XOZ, можно аналогично показать, что $dS_l \cos\alpha_l = \pm\Delta D_{1l}$, $dS_l \cos\beta_l = \pm\Delta D_{2l}$. Поэтому

$$\sum_{l=1}^{n}\left(F(x_l, y_l, z_l), \overline{dS_l}\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\pm P_l \Delta D_{1l} \pm Q_l \Delta D_{2l} \pm R_l \Delta D_{3l}\right).$$

Последнее даёт право записать поверхностный интеграл второго рода в стандартном виде

$$\iint_S (F(x,y,z),\ \overline{dS}) = \iint_S (F(x,y,z),\ n_0)\, dS =$$

$$= \iint_S P(x,y,z)\, dy\, dz + Q(x,y,z)\, dx\, dz + R(x,y,z)\, dx\, dy,$$

а если поверхность S может быть задана одновременно уравнениями $x = \varphi_1(y,z)$, $y = \varphi_2(x,z)$, $z = \varphi_3(x,y)$, то вычислять поверхностный интеграл второго рода по формуле

$$\iint_S \left(F(x,y,z),\ \overline{dS}\right) = \pm\iint_{D_1} P\left(\varphi_1(y,z), y, z\right) dy\, dz \pm$$

$$\pm\iint_{D_2} Q\left(x, \varphi_2(x,z), z\right) dx\, dz \pm \iint_{D_3} R\left(x, y, \varphi_3(x,y)\right) dx\, dy,$$

где D_1, D_2, D_3 — проекции поверхности S на координатные плоскости YOZ, XOZ, XOY соответственно и знак «+» берётся, если угол между вектором нормали и осью, вдоль которой ведётся проектирование, острый, а знак «–», если этот угол тупой.

Заметим, что для криволинейного и поверхностного интегралов имеют место общие для всех интегралов свойства. Отметим некоторые из них в формулировках, отражающих специфику этих интегралов.

Теорема 4.3. Криволинейный и поверхностный интегралы 2-го рода зависят от ориентации кривой и поверхности, точнее,

$$\int_\sigma \left(F(x,y,z), \overline{d\sigma}\right) = -\int_{\sigma^-} \left(F(x,y,z), \overline{d\sigma}\right).$$

Доказательство опустим.

Замечание. Если в качестве ориентированной кривой взять отрезок $[a,b]$ оси OX с направлением обхода от a к b, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ можно рассматривать как криволинейный интеграл второго рода по этой кривой, а теорему 4.3 считать обобщением свойства 1 определённого интеграла на случай ориентированного многообразия.

Теорема 4.4. Пусть $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ и размерность пересечения $\dim(\sigma_1 \cap \sigma_2) = n-1$. Тогда

$$\int\limits_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \left(F, \overline{d\sigma}\right) = \int\limits_{\sigma_1} \left(F, \overline{d\sigma}\right) + \int\limits_{\sigma_2} \left(F, \overline{d\sigma}\right).$$

Доказательство. Включив в число многообразий разбиения в определении интеграла по многообразию второго рода общую границу σ_1 с σ_2, получаем требуемое.

Теорема 4.5 (о среднем для криволинейного интеграла). Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на гладкой кривой γ, то существует точка (x_0,y_0,z_0) на кривой γ такая, что для криволинейного интеграла второго рода выполнено соотношение

$$\int\limits_{\gamma} \left(f, \overline{dl}\right) = \left(f(x_0, y_0, z_0), \tau(x_0, y_0, z_0)\right) L,$$

где L — длина кривой γ.

Доказательство опустим.

Теорема 4.6 (о среднем для поверхностного интеграла). Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на гладкой поверхности σ, то существует точка (x_0,y_0,z_0) поверхности такая, что для поверхностного интеграла второго рода выполнено равенство

$$\int\limits_{\sigma} \left(f, \overline{dS}\right) = \left(f(x_0, y_0, z_0), n(x_0, y_0, z_0)\right) S,$$

где S — площадь поверхности σ.

Доказательство опустим.

Пример 1. Вычислить $\int\limits_{\gamma} y^2dx + x^2dy$ вдоль кривой $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ если $t \in [0, \pi]$ в направлении увеличения параметра.

Имеем

$$\int\limits_{\gamma} y^2dx + x^2dy = \int\limits_0^{\pi} (b^2\sin^2 t(-a\sin t) + a^2\cos^2 t(b\cos t))dt = -\frac{4}{3}ab^2.$$

Пример 2. Найти работу по перемещению материальной точки под действием силы

$$f(x,y,z) = (x^3, xy, (x+z))^T = x^3\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + (x+z)\mathbf{k}$$

вдоль одного витка винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$ в направлении увеличения параметра.

Работа по перемещению материальной точки равна криволинейному интегралу второго рода $\int\limits_L (f, \overline{dl}) = \int\limits_L x^3 dx + xy dy + (x+z)\, dz$. Так как кривая задана параметрически и $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$, $dz = dt$, то

$$\int\limits_L (f, \overline{dl}) = \int\limits_0^{2\pi} (\cos^3 t(-\sin t) + \cos^2 t \sin t + (\cos t + t))\, dt =$$

$$= \left(\frac{\cos^4 t}{4} - \frac{\cos^3 t}{3} + \sin t + \frac{t^2}{2} \right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

Пример 3. Вычислить поток вектора $f(x,y,z) = (yz, xyz, xy)^T$ через часть плоскости $x + y + z = a$, лежащую в первом октанте в направлении вектора (1,1,1).

Поток вектора через поверхность равен поверхностному интегралу второго рода $\iint\limits_S yz\, dy\, dz + xyz\, dx\, dz + xy\, dx\, dy$. Поверхность однозначно проектируется на все три координатные плоскости. Поэтому интеграл может быть вычислен с помощью проектирования на них. Тогда

$$\iint\limits_S yz\, dy\, dz + xyz\, dx\, dz + xy\, dx\, dy = \iint\limits_{D_1} yz\, dy\, dz + \iint\limits_{D_2} xyz\, dx\, dz + \iint\limits_{D_3} xy\, dx\, dy,$$

где D_1, D_2, D_3 — проекции поверхности S на координатные плоскости YOZ, XOZ, XOY соответственно. Знаки плюс перед интегралами взяты потому, что вектор нормали к поверхности составляет острые углы со всеми координатными осями. Посчитаем первый интеграл. Имеем

$$\iint\limits_{D_1} yz\, dy\, dz = \int\limits_0^a y\, dy \int\limits_0^{a-y} z\, dz = \int\limits_0^a y\, dy \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{a-y} = \frac{1}{2} \int\limits_0^a y(a-y)^2 dy = \frac{a^4}{24}.$$

Третий интеграл считается аналогично и также равен $a^4/24$.

Для второго интеграла имеем

$$\iint\limits_{D_2} xyz\, dx\, dz = \iint\limits_{D_2} x(a - x - z)\, z\, dx\, dz =$$

$$= \int\limits_0^a x\,dx \int\limits_0^{a-x} (a-x-z)\,z\,dz = \int\limits_0^a x\,dx \left(\frac{1}{2}(a-x)z^2 - \frac{1}{3}z^3 \Big|_0^{a-x} \right) =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_0^a (a-x)^3 x\,dx = \frac{(a-x)^4 x}{24}\Big|_0^a - \frac{(a-x)^5}{120}\Big|_0^a = \frac{a^5}{120}.$$

Поэтому поток вектора через поверхность равен $\dfrac{a^4}{12} + \dfrac{a^5}{120}$.

П р и м е р 4. Вычислить поток вектора $f(x,y,z) = (x+y, y, z)^T$ через верхнюю половину сферы радиуса R в сторону внешней нормали.

Параметрическое уравнение верхней половины сферы радиуса R можно написать в виде $x = R\cos\varphi\sin\theta$, $y = R\sin\varphi\sin\theta$, $z = R\cos\theta$, где $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi/2$, или, что то же самое, в векторной форме $r = (R\cos\varphi\sin\theta)\mathbf{i} + (R\sin\varphi\sin\theta)\mathbf{j} + R\cos\theta\mathbf{k}$. Тогда

$$r'_\varphi = (-R\sin\varphi\sin\theta,\quad R\cos\varphi\sin\theta, 0)^T,$$

$$r'_\theta = (R\cos\varphi\cos\theta, R\quad \sin\varphi\cos\theta, -R\sin\theta)^T.$$

Поэтому

$$[r'_\varphi, r'_\theta] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\sin\varphi\cos\theta & -R\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -R^2\sin^2\theta\cos\varphi\mathbf{i} - \quad R^2\sin^2\theta\sin\varphi\mathbf{j} - R^2\cos\theta\sin\theta\mathbf{k}.$$

Этот вектор образует с осью OZ тупой угол, поэтому в качестве вектора нормали берём вектор $-[r'_\varphi, r'_\theta]$. Подставляя выражения x, y, z в функцию f и вычисляя скалярное произведение $\left(f, -[r'_\varphi, r'_\theta]\right)$, получаем

$$\left(f, -[r'_\varphi, r'_\theta]\right) = R^3\left((1+0,5\sin 2\varphi)\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta\right).$$

Поэтому поток вектора через поверхность равен

$$\iint\limits_S (f, \overline{dS}) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\left((1+0,5\sin 2\varphi)\sin^3\theta + \cos^2\theta\sin\theta\right)d\theta =$$

$$= R^3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left((1+0,5\sin 2\varphi)(1-\cos^2\theta)\sin\theta + \cos^2\theta\sin\theta\right)d\theta =$$

$$= R^3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left((1+0,5\sin 2\varphi)\left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right) - \frac{\cos^3\theta}{3} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^3.$$

Задание 4.2

1. Вычислить $\int\limits_{\gamma} ydx + x^2dy$: **а)** вдоль кривой $y = x^3$ от точки A(0,0) до точки B(2,8); **б)** вдоль кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ в направлении увеличения параметра; **в)** вдоль прямой, соединяющей точки A(2,1), B(3,–1), от точки *A* к точке *B*.

2. Найти работу по перемещению материальной точки под действием силы $f(x,y,z) = (x+y)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$: **а)** вдоль кривой $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = t^3$, $0 \le t \le \pi$ в направлении увеличения параметра; **б)** вдоль прямой, соединяющей точки A(1,2,–1), B(2,4,2), от точки *A* к точке *B*.

3. Вычислить поток вектора $f(x,y,z) = (x+y,\ y+z,\ zy)^T$ через часть поверхности $2x - 3y + 4z = 12$, заключённую между координатными плоскостями, в направлении нормали (2,–3,4).

4. Вычислить поток вектора $f(x,y,z) = (x+y,\ y,\ z)^T$ через нижнюю половину сферы радиуса R в направлении внутренней нормали.

Ответы: **1. а)** 23,2; **б)** $-\pi$, **в)** $-\dfrac{38}{3}$; **2. а)** $\dfrac{\pi^9}{3} - 3\pi + 24$, **б)** $\dfrac{101}{6}$; **3.** 84; **4.** $-2\pi R^3$.

4.5. **Элементы теории поля**

Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода находят важные применения в теории поля. К её изложению мы и приступаем.

Определение. Говорят, что в области $G \subset R^3$ ($D \subset R^2$) задано векторное поле, если задана вектор-функция $f : G \subset R^3 \to R^3$ ($f : D \subset R^2 \to R^2$), то есть функция вида

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$$

$$\left(f(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j} \right)$$

с областью определения $G \subset R^3$ ($D \subset R^2$). Аналогично говорят, что в области $G \subset R^3$ ($D \subset R^2$) задано скалярное поле, если задана скалярнозначная функция $f : G \subset R^3 \to R$ ($f : D \subset R^2 \to R$) с областью определения $G \subset R^3$ ($D \subset R^2$).

Если областью определения векторного поля является множество точек на плоскости, то поле называют плоским. Векторное поле можно интерпретировать как множество точек, к каждой из которых присоединён вектор. Примерами векторных полей являются: поле скоростей текущей жидкости, электрическое поле точечного заряда, магнитное поле, плотность электрического тока.

Напомним введённые ранее понятия, имеющие отношение к векторным и скалярным полям.

Вектор

$$\operatorname{grad} U = (U')^T = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \ \frac{\partial U}{\partial y}, \ \frac{\partial U}{\partial z} \right)^T$$

называется градиентом скалярной функции (*скалярного поля*).

Скаляр

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{a}} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos\gamma \right)$$

называется производной по направлению вектора $\bar{a}$ *от скалярной функции векторного аргумента*.

Векторное поле (или вектор-функцию) назовём потенциальным, если существует скалярная функция (скалярное поле) $U(x,y,z)$ такая, что $\operatorname{grad} U = (U')^T = f(x,y,z) = (P,Q,R)^T$. Функцию U назовём при этом потенциалом поля f.

Заметим, что если U — потенциал поля f, то $U + C$ тоже потенциал этого поля.

Критерием потенциальности поля служит следующий результат.

Теорема 4.7. Векторное поле

$$f(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k} =$$
$$= (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^T$$

является потенциальным в области $\Omega \subset R^3$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

1) криволинейный интеграл второго рода по любому замкнутому контуру L, полностью лежащему в Ω, равен нулю ($\int\limits_L (f, \overline{dl}) = 0$ для $\forall L \subset \Omega$), или, что то же самое, циркуляция поля по любому замкнутому пути равна нулю;

2) если A_1, A_2 — любые две точки из Ω и $L_1, L_2 \subset \Omega$ — две произвольные кривые, их соединяющие, то $\int\limits_{L_1} (f, \overline{dl}) = \int\limits_{L_2} (f, \overline{dl})$, то есть криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования.

Если поле потенциально и $U(x,y,z)$ — его потенциал, то

$$\int\limits_L (f, \overline{dl}) = U(A_2) - U(A_1).$$

Доказательство. Покажем вначале, что условия 1 и 2 эквивалентны. Пусть выполнено условие 1, A_1, A_2 — две произвольные точки из Ω и $L_1, L_2 \subset \Omega$ — две кривые, соединяющие A_1 и A_2. Рассмотрим замкнутый контур $L = L_1^+ \cup L_2^-$. Тогда

$$0 = \int\limits_L (f, \overline{dl}) = \int\limits_{L_1^+} (f, \overline{dl}) + \int\limits_{L_2^-} (f, \overline{dl}) = \int\limits_{L_1^+} (f, \overline{dl}) - \int\limits_{L_2^+} (f, \overline{dl}),$$

откуда и следует требуемое. Пусть теперь выполнено условие 2, L — произвольный замкнутый контур, лежащий в Ω, и A_1, A_2 — две произвольные точки, лежащие на контуре L. Точками A_1, A_2 контур L разбивается на два контура $L_1, L_2 \subset \Omega$ так, что $L = L_1^+ \cup L_2^-$. Тогда, аналогично предыдущему, имеем

$$0 = \int\limits_{L_1^+} (f, \overline{dl}) - \int\limits_{L_2^+} (f, \overline{dl}) = \int\limits_{L_1^+} (f, \overline{dl}) + \int\limits_{L_2^-} (f, \overline{dl}) = \int\limits_L (f, \overline{dl}).$$

Перейдём к доказательству теоремы.

Необходимость. Пусть поле потенциально, то есть существует скалярная функция U такая, что $\operatorname{grad} U = (U')^T = (P, Q, R)^T$,

A_1, A_2 — произвольные точки из Ω и $L \subset \Omega$ — произвольный путь, соединяющий A_1, A_2. Пусть кривая L задана параметрически так, что значению параметра t_1 соответствует точка A_1, а значению параметра t_2 соответствует точка A_2. Так как $(U')^T = (U'_x, U'_y, U'_z)^T = (P, Q, R)^T$, то

$$\int_L (f(x,y,z), \overline{dl}) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt.$$

Подынтегральная функция есть производная $\frac{dU}{dt}$ сложной функции $U(x(t),\ y(t),\ z(t))$. Поэтому последний интеграл равен

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dU}{dt} dt = U(t_2) - U(t_1) = U(A_2) - U(A_1).$$

Мы получили, что интеграл зависит от конечных точек и не зависит от пути, соединяющего эти точки. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, $A(x,y,z)$ — произвольная точка из Ω, A_0 — фиксированная точка из Ω. Покажем, что функция

$U(x,y,z) = \int_{A_0}^{A} \left(f(x,y,z), \overline{dl} \right)$ есть потенциал поля $f(x,y,z) =$

$= P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$. Для этого достаточно показать, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z).$$

Возьмём точку $A_1(x + \Delta x, y, z)$. Тогда

$$U(x + \Delta x, y, z) = \int_{A_0}^{A_1} \left(f(x,y,z), \overline{dl} \right).$$

В силу независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования последний интеграл равен

$$\int_{A_0}^{A} \left(f(x,y,z), \overline{dl} \right) + \int_{A}^{A_1} \left(f(x,y,z), \overline{dl} \right) = U(x,y,z) + \int_{x}^{x+\Delta x} P(t,y,z) dt.$$

По теореме о среднем $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y,z)\,dt = P(x_1,y,z)\,\Delta x$, где x_1 — некоторая точка отрезка $[x, x+\Delta x]$. Заметим, что эту точку можно записать в виде $x_1 = x + \theta\Delta x$, где $0 \le \theta \le 1$ — некоторое число. Поэтому

$$\frac{U(x+\Delta x,y,z)-U(x,y,z)}{\Delta x} = P(x_1,y,z).$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем, что $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y,z)$. Аналогично устанавливается справедливость оставшихся соотношений

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z).$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема даёт возможность восстановить потенциал, если известно, что поле потенциально, но она не даёт практических рецептов выяснения потенциальности поля. Попытаемся получить характеристики, позволяющие установить потенциальность поля.

Введём вектор

$$\mathrm{rot}\quad f(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

который назовём ротором (вихрем) вектор-функции $f(x,y,z)$.

Определение. Поле называется безвихревым, если $\mathrm{rot} f = 0$.

Между величиной $\mathrm{rot} f$ и потенциальностью поля $f(x,y,z)$ существует связь, выражаемая следующей теоремой.

Теорема 4.8. Если поле

$$f(x,y,z)=(P(x,y,z),\,Q(x,y,z),\,R(x,y,z))^T$$

потенциально и существует непрерывная производная $f'(x,y,z)$, то оно безвихревое (*всякое потенциальное дифференцируемое поле является безвихревым*), то есть $\operatorname{rot} f=0$.

Доказательство. Если поле потенциально, то существует скалярнозначная функция $U(x,y,z)$ такая, что

$$U'(x,y,z)=\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))^T .$$

Следовательно, $\dfrac{\partial U}{\partial x}=P$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q$, $\dfrac{\partial U}{\partial z}=R$. Тогда

$$\operatorname{rot} f=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}\right)\mathbf{k}=0.$$

Теорема доказана.

Обратное утверждение верно лишь при дополнительных ограничениях на область, в которой задано векторное поле. Для уточнения формулировок введём некоторые понятия.

Определение. Множество называется связным, если для любых двух точек из этого множества существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и целиком лежащая в данном множестве.

Определение. Точку множества назовём внутренней точкой, если существует окрестность этой точки, целиком лежащая в данном множестве; внешней точкой, если существует окрестность этой точки, целиком лежащая вне данного множества; граничной, если во всякой окрестности этой точки есть как точки данного множества, так и точки, ему не принадлежащие. Совокупность всех граничных точек данного множества назовём его границей.

Определение. Множество назовём односвязным, если его граница есть связное множество.

Теорема 4.9. Если область Ω является односвязной и векторное поле безвихревое ($\operatorname{rot} f = 0$), то оно потенциально.

Доказательство этого результата опустим. Желающие могут познакомиться с ним в [8].

Рассмотрим более подробно плоский случай. Пусть векторное поле задано на плоскости, то есть имеет вид

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} .$$

Тогда

$$\operatorname{rot} f(x, y) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\mathbf{k} .$$

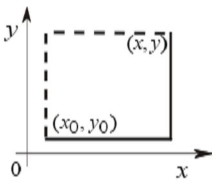
Таким образом, для плоского поля условие $\operatorname{rot} f = 0$ эквивалентно условию $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Тогда сформулированные выше результаты о потенциальности поля приобретают следующий вид.

Теорема 4.10. Если плоское поле потенциально, то $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Теорема 4.11. Если $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ и область односвязная, то плоское поле f потенциально.

Теорема 4.12. Если область односвязная, то любой криволинейный интеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ по произвольному контуру L не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Теорема 4.13. Если область односвязная, то поле потенциально тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.



П р и м е р 1. Доказать, что поле

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$$

потенциально, и восстановить его потенциал.

Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, то $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, и поле потенциально во всей плоскости. Следовательно, криволинейный интеграл $\int\limits_{A_0}^{A} P\,dx + Q\,dy$ по любому пути, соединяющему две точки, не зависит от пути интегрирования. В качестве начальной точки интегрирования A_0 выберем начало координат $(0,0)$. Конечную точку возьмём произвольную с координатами (x,y). Наиболее простыми путями интегрирования являются две возможные ломаные, состоящие из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Поэтому для пути, изображённого на рисунке (с учётом того, что $(x_0, y_0) = (0, 0)$),

$$U(x, y) = \int\limits_{A_0}^{A} (f, \overline{dl}) = \int\limits_{0}^{x} P(x, 0)\,dx + \int\limits_{0}^{y} Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{x} (2x \cdot 0)\,dx + \int\limits_{0}^{y} x^2 dy = x^2 y.$$

Таким образом, $U(x, y) = x^2 y$.

П р и м е р 2. Доказать, что поле

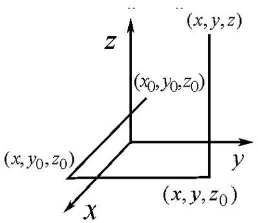
$$f(x, y, z) = \left(y^2 z,\ 2xyz,\ xy^2 + 3z^2\right)^T =$$

$$= y^2 z\mathbf{i} + 2xyz\mathbf{j} + (xy^2 + 3z^2)\mathbf{k} = (P, Q, R)^T$$

потенциально, и восстановить его потенциал.

Найдём $\operatorname{rot} f = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$. Так как

$\dfrac{\partial R}{\partial y} = 2xy$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = 2xy$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = y^2$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = y^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2yz$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2yz$, то $\operatorname{rot} f = 0$, и поле потенциально во всём пространстве. Следовательно,



рал $\int\limits_{A_0}^{A} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ по любому пути, соединяющему две точки, не зависит от пути интегрирования. В качестве начальной точки интегрирования A_0 выберем начало координат $(0,0,0)$. Конечную точку возьмём произвольную с координатами (x,y,z). Наиболее простыми путями интегрирования являются возможные ломаные, состоящие из отрезков прямых, параллельных координатным осям. Поэтому для пути, изображённого на рисунке (с учётом того, что $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$),

$$U(x,y,z) = \int\limits_{A_0}^{A} (f, \overline{dl}) = \int\limits_0^x P(x,0,0)\,dx + \int\limits_0^y Q(x,y,0)\,dy + \int\limits_0^z R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^x (0 \cdot 0)\,dx + \int\limits_0^y (2xy \cdot 0)\,dy + \int\limits_0^z (xy^2 + 3z^2)\,dz = xy^2 z + z^3.$$

Таким образом, $U(x,y,z) = xy^2 z + z^3$.

Введём ещё одну характеристику векторного поля, называемую дивергенцией, или функцией источника, по формуле

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}.$$

Назовём поле соленоидальным или трубчатым, если дивергенция равна нулю в каждой его точке.

Сформулируем несколько результатов, связывающих рассмотренные выше понятия.

Теорема 4.14 (Стокса). Пусть L — замкнутый кусочно-гладкий контур в R^3, S — любая кусочно-гладкая поверхность, натянутая на L. Согласуем ориентации L и S так, чтобы если смотреть из конца вектора нормали к S, определяющего сторону, то обход L совершается против часовой стрелки. Тогда если f — дифференцируемая функция, то циркуляция вектора f по контуру L равна потоку вектора $\operatorname{rot} f$ через поверхность S, натянутую на этот контур, то есть

$$\int_L (f,\overline{dl}) = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \iint_S (\operatorname{rot} f, \overline{dS}).$$

Эта формула называется формулой Стокса.

Формула Стокса позволяет дать другую характеристику векторного поля $\operatorname{rot} f$. Действительно, по теореме 4.6 о среднем для поверхностного интеграла второго рода $\iint_S (\operatorname{rot} f, \overline{dS}) =$

$= (\operatorname{rot} f(x_0, y_0, z_0), \bar{n}_0)\,\sigma(S)$, где $\bar{n}_0$ — единичный вектор нормали к поверхности S в некоторой её средней точке (x_0, y_0, z_0), $\sigma(S)$ — площадь поверхности S. Тогда

$$(\operatorname{rot} f, \bar{n}_0) = \lim_{\sigma(S)\to 0} \frac{1}{\sigma(S)} \iint_S \left(\operatorname{rot} f, \overline{dS}\right) = \lim_{\sigma(S)\to 0} \frac{1}{\sigma(S)} \int_L \left(f, \overline{dl}\right).$$

Другими словами, если через точку M_0 провести поверхность и на этой поверхности взять контур, охватывающий точку M_0, то проекция $(\operatorname{rot} f, \bar{n}_0)$ вектора $\operatorname{rot} f$ на направление нормали $\bar{n}_0$ к поверхности S в точке M_0 равна пределу средней плотности циркуляции $\frac{1}{\sigma(S)} \int_L (f, \overline{dl})$ вектора f по контуру L при стягивании контура в точку M_0.

В случае плоской области, если положить $\overline{dx\,dy} = dx\,dy\,\mathbf{k}$, теорема Стокса формулируется следующим образом.

Теорема 4.15 (Грина). Пусть D — плоская область с кусочно-гладкой границей ∂D и ∂D ориентирована так, что обход по ней в положительном направлении совершается против часовой стрелки. Тогда если $f(x,y)$ — дифференцируемая функция, то

$$\int_{\partial D} (f, \overline{dl}) = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \iint_D (\operatorname{rot} f, \overline{dx\,dy}) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Эта формула называется формулой Грина.

Теорема 4.16. Пусть G — область в R^3 и ∂G — кусочно-гладкая граница G, ориентированная в сторону внешней нормали. Тогда если $f(x,y,z)$ — дифференцируемая функция, то поток вектора через границу области G равен интегралу по области G от $\operatorname{div} f$, то есть

$$\iint_{\partial G}(f,\overline{dS}) = \iiint_{G}\operatorname{div} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz .$$

Эта формула называется формулой Гаусса-Остроградского.

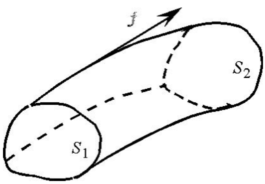
Формула Гаусса-Остроградского позволяет дать физическую интерпретацию дивергенции и соленоидальности векторного поля.

Пусть G — шар с центром в точке (x_0,y_0,z_0) радиуса ε. Применяя к правой части формулы Гаусса-Остроградского теорему о среднем, получаем $\iint_{\partial G}\left(f,\overline{dS}\right) = \operatorname{div} f(x_1,y_1,z_1)V_\varepsilon$, где (x_1, y_1, z_1) — некоторая точка шара, V_ε — его объём. Тогда

$$\operatorname{div} f(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{V_\varepsilon}\iint_{\partial G}(f,\overline{dS}) ,$$

то есть $\operatorname{div} f$ в точке M_0 равна пределу отношения потока вектора f через границу замкнутой области G, охватывающей точку, к объёму области G при стягивании области в точку M_0.

Таким образом, если $\operatorname{div} f(x_0,y_0,z_0) > 0$, *то говорят, что в точке — источник, если* $\operatorname{div} f(x_0,y_0,z_0) < 0$, *то говорят, что в точке — сток, если* $\operatorname{div} f(x_0,y_0,z_0) = 0$, *то говорят, что в точке нет ни источников, ни стоков.*



Рассмотрим более подробно соленоидальные поля. Пусть L — замкнутый контур. Через каждую его точку проведём линию, касательная к которой параллельна вектору $f(x,y,z)$. Такие линии называются векторными или силовыми линиями поля. Поверхность, образованную векторными линиями поля f, проходящими через точки замкнутого контура L, назовём векторной трубкой. В силу построения векторной трубки вектор нормали n к ней перпендикулярен вектору f. Тогда $(f(x,y,z),n)\,dS = (f,\overline{dS}) = 0$ в любой точке векторной трубки.

Поэтому для любого куска S поверхности векторной трубки $\int\limits_S (f, \overline{dS}) = 0$, то есть поток вектора через поверхность векторной трубки равен нулю (через неё, как и через боковую поверхность реальной трубы, ничего ни вытекает, ни втекает). Пусть S_1 и S_2 — два сечения векторной трубки, векторы нормалей к которым направлены в одну сторону, и S — полная поверхность трубки, состоящая из S_1^-, $S_2^+ = S_2$ и поверхности трубки между этими сечениями. Тогда по теореме Гаусса-Остроградского $\iint\limits_S (f, \overline{dS}) = \iiint\limits_G \operatorname{div} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, и так как для соленоидального поля $\operatorname{div} f(x, y, z) = 0$ для всех точеобласти G, то $\iint\limits_S (f, \overline{dS}) = 0$. Так как поток вектора через боковую поверхность трубки равен нулю, то из последнего соотношения следует, что $\iint\limits_{S_1^-} (f, \overline{dS}) + \iint\limits_{S_2^+} (f, \overline{dS}) = 0$, а следовательно, и $\iint\limits_{S_2} (f, \overline{dS}) = -\iint\limits_{S_1^-} (f, \overline{dS}) = \iint\limits_{S_1^+} (f, \overline{dS})$. Таким образом, для соленоидальных полей потоки вектора через любые сечения равны между собой.

П р и м е р. Найти поток векторного поля $f(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + yz\mathbf{k} = (xz, xy, yz)^T$ через внешнюю сторону поверхности, лежащей в первом октанте и ограниченной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$. По теореме 4.15 Гаусса-Остроградского поток векторного поля через замкнутую поверхность равен

$$\iint\limits_{\partial G} (f, \overline{dS}) = \iint\limits_{\partial G} xz\, dy\, dz + xy\, dx\, dz + yz\, dx\, dy =$$
$$= \iiint\limits_G \operatorname{div} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_G (x + y + z)\, dx\, dy\, dz.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, окончательно получаем

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \rho\, d\rho \int\limits_0^H ((\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi) + z)\, dz = R^2 H\left(\frac{2}{3}R + \frac{1}{8}\pi H\right).$$

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Уравнения первого порядка

5.1.1. Общие сведения

Изложенное ниже является введением в круг вопросов и задач, изучаемых в теории дифференциальных уравнений, и не претендует на полноту.

Определение. Уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и некоторое количество её производных, т.е. уравнение вида

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{5.1}$$

называется дифференциальным уравнением n-го порядка. Если x — векторная величина, то уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных, а если x — скаляр, то обыкновенным дифференциальным уравнением.

Для многих динамических, то есть меняющихся во времени, процессов и явлений бывает трудно написать закон их поведения в виде конкретной функции времени, а написать этот закон в виде дифференциального уравнения часто значительно легче. Построением дифференциальных уравнений для описания конкретных процессов, то есть построением математических моделей этих процессов, мы заниматься не будем.

Не оговаривая особо, будем изучать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Самым простым обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение 1-го порядка, то есть уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{5.2}$$

получающееся из (5.1) при $n = 1$. Функция $F(x,y,z)$ в (5.2) предполагается определённой на некотором множестве G из R^3.

Если уравнение (5.2) удается разрешить относительно y' и записать в виде

$$y' = f(x, y), \tag{5.3}$$

то уравнение (5.3) называется уравнением 1-го порядка, разрешенным относительно производной. Иногда уравнение (5.3) удобнее записывать в эквивалентном виде в так называемой дифференциальной форме

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \qquad (5.4)$$

Функции $f(x,y)$, $M(x,y)$, $N(x,y)$ предполагаются заданными на некотором множестве D плоскости R^2.

Мы будем пользоваться той записью, которая в данный момент удобнее.

> *Определение*. Функция $\varphi(x)$, заданная на отрезке или интервале (a,b), называется решением дифференциального уравнения в области D, если при подстановке в уравнение она обращает его в тождество в этой области.

Естественно, чтобы быть решением дифференциального уравнения первого порядка, функция $\varphi(x)$ должна быть дифференцируемой, а следовательно, и непрерывной. Кроме того, точка $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ должна принадлежать множеству G, если речь идёт о решении уравнения (5.2), а точка $(x, \varphi(x))$ должна принадлежать множеству D, если речь идёт о решении уравнений (5.3) или (5.4). Будем предполагать, что и первая производная функции $\varphi(x)$ непрерывна. Чтобы быть решением дифференциального уравнения n-го порядка, функция $\varphi(x)$ должна иметь n непрерывных производных.

При изучении дифференциальных уравнений выделяют качественную и количественную теории дифференциальных уравнений.

В качественной теории по виду дифференциального уравнения изучают свойства его решений, не находя их.

В количественной теории занимаются разработкой методов нахождения решений дифференциальных уравнений.

Мы будем заниматься количественной теорией дифференциальных уравнений.

В количественной теории рассматривают точные и приближенные методы нахождения решений. Займемся пока точными методами.

Решить дифференциальное уравнение означает описать всю совокупность его решений. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения, как и любого другого уравнения, состоит в преобразовании его к такому виду, из которого это решение легко находится. При этом два уравнения $F_1(x, y, y') = 0$ и $F_2(x, y, y') = 0$ назовём эквивалентными в области D, если решения одного из них являются решениями другого. Идеальным было бы при нахождении решения осуществлять переход к эквивалентным уравнениям. Это не всегда удаётся. Поэтому в процессе преобразований мы должны следить за тем, чтобы не терять решений и не приобретать новых.

5.1.2. **Уравнения с разделяющимися переменными**

Самыми простыми в изучении являются уравнения вида $f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$. Действительно, если $y(x)$ есть решение этого уравнения, то, в силу инвариантности формы первого дифференциала, можем записать $\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy$. *Равенство подразумевает, что множество всех первообразных в левой части равно множеству всех первообразных в правой части. Если* $\Phi_1(x)$ *—какая-нибудь первообразная левой части, а* $\Phi_2(x)$ *— правой части, то последнее соотношение можно переписать в виде* $\Phi_1(x) = \Phi_2(y) + C$, *разрешая которое относительно* y, *получаем всю совокупность решений исходного уравнения.* Большинство методов решений дифференциальных уравнений заключается в сведении их к уравнению рассмотренного выше типа.

Следующими по сложности являются уравнения с разделяющимися переменными.

Пусть в выражении (5.3) $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, то есть уравнение может быть представлено в виде

$$y' = f_1(x)f_2(y) \tag{5.5}$$

или в эквивалентной форме

$$M_1(x)M_2(y)\,dx + N_1(x)N_2(y)\,dy = 0. \tag{5.6}$$

Уравнения (5.5) и (5.6) называются уравнениями с разделяющимися переменными.

Если $f_2(y) \neq 0$ для $\forall y \in [c, d]$, то, с учетом того, что $y' = dy/dx$, из (5.5) получаем

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx,$$

откуда, с учетом инвариантности формы дифференциала первого порядка, имеем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx\ .$$

Как и ранее, полученное соотношение означает, что множество первообразных в левой части равно множеству всех первообразных в правой части. Если $\Phi_2(x)$, $\Phi_1(x)$ — какие-либо первообразные левой и правой частей соответственно, то его можно переписать в виде $\Phi_2(y) = \Phi_1(x) + C$. Разрешая последнее относительно y, получаем всю совокупность решений исходного уравнения.

Заметим, что если $f_2(y_0) = 0$, то мы должны проверить, является ли функция $y = y_0$ решением исходного дифференциального уравнения, чтобы не потерять его в процессе нахождения решения.

Аналогично для уравнения в форме (5.6), если $M_2(y) \neq 0$, $N_1(x) \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$, $\forall y \in [c, d]$, получаем

$$\frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = -\frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx$$

или, интегрируя обе части по x,

$$\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = -\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx\ .$$

Вычисляя полученные интегралы, находим все множество решений (при $M_2(y) \neq 0$, $N_1(x) \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$, $\forall y \in [c, d]$) уравнения (5.6).

Пример 1. Для уравнения $y' = e^{x+y}$ имеем $y' = e^x e^y$, откуда $e^{-y}dy = e^x dx$ или, интегрируя обе части по x, $e^{-y} = -e^x + C$ и, наконец, $y = -\ln(-e^x + C)$.

Пример 2. Решить уравнение $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$. В предположении, что $y(x+1) \neq 0$, получаем $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{x\,dx}{x+1}$ или, интегрируя,

$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln|C|$, отсюда $y = C(x+1)e^{-x}$. Решение $y=0$ получается при $C=0$, а решение $x=-1$ не содержится в нем. Таким образом, решением уравнения являются функции $y = C(x+1)e^{-x}$, $x=-1$.

Пример 3. Решить уравнение $(e^{5x}+9)\,dy = ye^{5x}dx$. В предположении, что $y \neq 0$, получаем $\frac{dy}{y} = \frac{e^{5x}\,dx}{e^{5x}+9}$ или, интегрируя, $\ln|y| = \frac{1}{5}\ln(e^{5x}+9) + \ln|C|$, отсюда $y = C\sqrt[5]{e^{5x}+9}$. Решение $y=0$ получается при $C=0$.

Задание 5.1. Решить дифференциальные уравнения:

1) $\sqrt{1-x^3}\,y' = x^2\sqrt{1-y^2}$; **2)** $\sqrt{9-x^4}\,y' + x^3(y^2+4) = 0$;

3) $x^3(y^2-1)\,dx - (1+x^4)\,2y\,dy = 0$; **4)** $(1+x^2)\,y' = x\,(y+1)$.

Ответы:

1) $y = \sin\left(C - \frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}\right), y = \pm 1$; **2)** $y = 2\mathrm{tg}\left(\sqrt{9-x^4}+C\right)$;

3) $y^2 = 1 + C\sqrt[4]{1+x^4}$; **4)** $y = C\sqrt{1+x^2}$, $y=-1$.

5.1.3. **Однородные уравнения**

Функция $F(x_1, x_2, .., x_n)$ называется однородной степени k, если для нее выполнено соотношение $F(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k F(x_1, x_2, .., x_n)$.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ — однородная функция нулевой степени, то есть $f(tx,ty) = f(x,y)$.

В этом случае дифференциальное уравнение удаётся записать в виде $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Отметим, что уравнение $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ является однородным тогда и только тогда, когда функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ — однородные функции одной и той же степени.

Однородное дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = xu$ или, что то же самое, $u = \dfrac{y}{x}$, где u — новая искомая функция. Действительно, тогда $y' = u + u'x$ и исходное уравнение может быть переписано в виде $u + u'x = \varphi(u)$, или $u'x = \varphi(u) - u$. Из последнего при $\varphi(u) \neq u$ можем записать $\dfrac{du}{\varphi(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$. Заметим, что в случае $\varphi(u) = u$ исходное уравнение уже является уравнением с разделяющимися переменными.

Пример. Решить уравнение $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2 dy = 0$. Это однородное уравнение, так как $y^2 - 2xy$ и x^2 — однородные функции второй степени. Делаем замену $y = xu$, $dy = u\,dx + x\,du$. Подставляя в уравнение, имеем

$$(x^2u^2 - 2x^2u)\,dx + x^2(u\,dx + x\,du) = 0.$$

Раскрывая скобки, приводя подобные и сокращая на x^2, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$(u^2 - u)\,dx + x\,du = 0.$$

Разделяя переменные, получаем $-\dfrac{du}{u(u-1)} = \dfrac{dx}{x}$ или, что то же самое, $\left(\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u-1}\right)du = \dfrac{dx}{x}$. Интегрируя последнее соотношение, имеем $\ln|u| - \ln|u-1| = \ln|x| + \ln|C|$. Потенцируя (переходя от логарифмической функции к e^x), можем записать $\dfrac{u}{u-1} = Cx$ или, делая обратную замену $u = \dfrac{y}{x}$, получаем $\dfrac{y}{y-x} = Cx$. При сокращении на x^2 мы потеряли решение $x = 0$, которое в найденное решение не входит. Кроме того, мы могли потерять решения при делении на $u(u-1)$. Случай $u = 0$ даёт решение $y = 0$, входящее в найденное при $C = 0$. Случай $u = 1$ даёт решение $y = x$, которое не входит в найденное.

Уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ приводятся к однородным переносом начала координат в точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, если определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, и заменой $a_1x + b_1y = z$, если этот определитель равен нулю.

Задание 5.2. Решить уравнения:

1) $(y-x)\,dy + y\,dx = 0$; **2)** $(x^2 - xy + y^2)\,dy + y^2 dx = 0$;
3) $xy' = y(\ln y - \ln x)$.

Ответы: **1)** $x = C\exp\left(-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{y}{x}$, $y = 0$;

2) $x = C\exp\left(\dfrac{x}{y-x}\right)\dfrac{x}{y}$, $y = 0$, $y = x$; **3)** $y = x\exp(Cx+1)$.

5.1.4. **Постановка задачи о выделении решений. Теорема существования и единственности**

Как мы уже видели, множество решений дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ есть некоторое семейство функций, зависящее от константы. Хотелось бы выяснить условия на функцию $f(x,y)$, при выполнении которых можно выделить конкретное решение этого уравнения, удовлетворяющее заранее заданным требованиям. Для уравнения первого порядка требования формулируются следующим образом.

Найти решения дифференциального уравнения (5.3)

$$y' = f(x,y),$$

удовлетворяющие условиям

$$y(x_0) = y_0. \tag{5.7}$$

Сформулированные условия называются условиями Коши, а задача о выделении решения, удовлетворяющего условиям Коши, — *задачей Коши*.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по y в области D, если для любых двух точек $(x,y_1),(x,y_2)$ из этой области выполнено неравенство

$$\left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|, \tag{5.8}$$

где L — некоторая константа, не зависящая от x и y.

Теорема 5.1 (существования и единственности). Пусть в уравнении (5.3) $y' = f(x,y)$ функция $f(x,y)$, заданная в области D на плоскости, непрерывна по x и удовлетворяет условию Липшица (5.8) по y. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существуют интервал $(x_0 - \lambda, x_0 + \lambda)$ и функция $y = \varphi(x)$, заданная на этом интервале так, что есть решение уравнения (5.3), удовлетворяющее условию (5.7). Это решение единственно в том смысле, что если $y = \phi(x)$ есть решение уравнения (5.3), определенное на интервале (α,β), включающем в себя точку x_0, и удовлетворяющее условию (5.7), то функции $\varphi(x)$ и $\phi(x)$ совпадают там, где они обе определены.

Доказательство этого результата опустим. Желающие могут ознакомиться с ним в [9–11].

Множество D назовём выпуклым по y, если для всяких двух точек (x, y_1), (x, y_2) из D этому множеству принадлежат и точки отрезка, их соединяющего, то есть точки вида $(x, \overline{y})$, где $\overline{y}$ — число, лежащее между y_1 и y_2.

Отметим, что если непрерывная на множестве D функция $f(x,y)$ имеет там же непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, множество D — ограничено, замкнуто и выпукло по y, то функция $f(x,y)$ удовлетворяет на множестве условию Липшица по y. Действительно, по теореме Лагранжа о конечных приращениях можем записать

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| = \left|\frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}(y_1 - y_2)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}\right| \left|y_1 - y_2\right| \le \max_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \left|y_1 - y_2\right|.$$

Поэтому в теореме 5.1 существования и единственности вместо требования выполнения условия Липшица по y часто требуют, чтобы функция $f(x,y)$ имела непрерывную частную производную по переменной y. Особенно, если учитывать, что последнее условие проверять легче.

Теорема существования и единственности гарантирует, что при выполнении её условий через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит только одно решение уравнения (5.3). Если условия теоремы нарушаются в некоторой точке, то через неё может проходить больше чем одно решение (нарушается единственность) либо не проходить ни одного решения (нарушается существование).

Определение. Семейство $y = \varphi(x, C)$ решений дифференциального уравнения (5.3) назовём его общим решением, если для любого набора начальных данных $(x_0, y_0) \in D$ найдётся константа $\bar{C}$, на которой этот набор реализуется, то есть такая, что для решения $y = \varphi(x, \bar{C})$ выполнены начальные условия $y_0 = \varphi(x_0, \bar{C})$.

5.1.5. **Линейные уравнения первого порядка**

Уравнение первого порядка вида

$$a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = b(x) \tag{5.9}$$

называется линейным дифференциальным уравнением. Если $b(x) \equiv 0$, то уравнение (5.9) называется линейным однородным, в противном случае — линейным неоднородным. Для линейного дифференциального уравнения теорема существования и единственности имеет более конкретный вид.

Теорема 5.2. Пусть $a_1(x)$, $a_0(x)$, $b(x)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$, $a_1(x) \neq 0$ для $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Тогда для любой точки (x_0, y_0), $x_0 \in [a, b]$, существует единственное решение уравнения (5.9), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ и определенное на всем интервале $[\alpha,\beta]$.

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение

$$a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0\,. \tag{5.10}$$

Разделяя переменные, получаем $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}dx$ или, интегрируя обе части, $\ln|y| = -\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx + \ln|C|$. Последнее соотношение, с учетом обозначения $\exp(x) = e^x$, записывается в форме

$$y = C\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx\right). \qquad (5.11)$$

Заметим, что выбор точки x_0 влияет лишь на вид конкретной первообразной функции $\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$.

Будем искать решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (5.9) *методом Лагранжа* или, что то же самое, *методом вариации произвольной постоянной*.

Суть метода заключается в том, что мы пытаемся найти решение уравнения (5.9) в виде (5.11), в котором вместо константы C подставлена функция $C(x)$, то есть в виде

$$y = C(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx\right). \qquad (5.12)$$

Подставив решение (5.12) в (5.9), получаем

$$C'(x) = \frac{b(x)}{a_1(x)}\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx\right).$$

Интегрируя последнее, имеем

$$C(x) = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{b(x)}{a_1(x)}\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(t)}{a_1(t)}dt\right)\right)dx + C_1,$$

где C_1 — некоторая новая константа. Подставляя полученное выражение для $C(x)$ в (5.12), окончательно получаем общее решение исходного линейного уравнения

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x}\left(\frac{b(x)}{a_1(x)}\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(t)}{a_1(t)}dt\right)\right)dx + C_1\right)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_0(x)}{a_1(x)}dx\right).$$

Пример 1. Решить уравнение $y' + 2y = 4x$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + 2y = 0$. Решая его, получаем (при $x_0 = 0$) $y = Ce^{-2x}$. Ищем теперь решение исходного уравнения в виде $y = C(x)e^{-2x}$. Подставляя y и $y' = C'(x)e^{-2x} - 2C(x)e^{-2x}$ в исходное уравнение, имеем $C'(x) = 4xe^{2x}$, откуда $C(x) = 2xe^{2x} - e^{2x} + C_1$, и, подставляя полученное выражение C(x) в y(x), получаем общее решение исходного уравнения

$$y(x) = (2xe^{2x} - e^{2x} + C_1)e^{-2x} = 2x - 1 + C_1e^{-2x}\,.$$

Пример 2. Решить уравнение $y' + 2xy = 6x$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + 2xy = 0$. Решая его, получаем $\frac{dy}{y} = -2x\,dx$, $\ln|y| = -x^2 + \ln|C|$, $y = Ce^{-x^2}$. Ищем теперь решение исходного уравнения в виде $y = C(x)e^{-x^2}$. Подставляя y и $y' = C'(x)\,e^{-x^2} - 2xC(x)\,e^{-x^2}$ в исходное уравнение, имеем $C'(x) = 6xe^{x^2}$, откуда $C(x) = 3e^{x^2} + C_1$, и $y(x) = 3 + C_1e^{-x^2}$ — общее решение исходного уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $y' + 5y = e^{7x}$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + 5y = 0$. Решая его, получаем $\frac{dy}{y} = -5\,dx$, $\ln|y| = -5x + \ln|C|$, $y = Ce^{-5x}$. Ищем теперь решение исходного уравнения в виде $y = C(x)e^{-5x}$. Подставляя y и $y' = C'(x)e^{-5x} - 5C(x)e^{-5x}$ в исходное уравнение, имеем $C'(x) = e^{12x}$, откуда $C(x) = \frac{1}{12}e^{12x} + C_1$, и $y(x) = \frac{1}{12}e^{7x} + C_1e^{-5x}$ — общее решение исходного уравнения.

Пример 4. Решить уравнение $(4e^{3y} - x)\,dy = dx$. Вспоминая, что переменные x и y в дифференциальном уравнении равноправны, и переписывая его в виде $4e^{3y} - x = \frac{dx}{dy}$ или, что то же самое, в форме $x' + x = 4e^{3y}$, получим, что данное уравнение является линейным относительно x и x'. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $x' + x = 0$. Решая его, получаем $\frac{dx}{x} = -dy$, $\ln|x| = -y + \ln|C|$, $x = Ce^{-y}$. Ищем теперь решение уравнения $x' + x = 4e^{3y}$ в виде $x = C(y)e^{-y}$. Подставляя x и $x' = C'(y)e^{-y} - C(x)e^{-y}$ в него, имеем $C'(y) = 4e^{4y}$, откуда $C(y) = e^{4y} + C_1$, и $y(x) = e^{3y} + C_1e^{-y}$ — общее решение исходного уравнения.

5.1.6. **Уравнения Бернулли**

Дифференциальное уравнение

$$y' + a_0(x)y = b(x)y^n \qquad (5.13)$$

называется уравнением Бернулли.

Так как при $n = 0$ получается линейное уравнение, а при $n = 1$ — с разделяющимися переменными, то предположим, что $n \neq 0$ и $n \neq 1$. Разделим обе части (5.13) на y^n. Тогда

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a_0(x)}{y^{n-1}} = b(x)\,. \qquad (5.14)$$

Положив $\frac{1}{y^{n-1}} = z$, имеем $\frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}$. Подставляя в (5.14), получим $\frac{z'}{1-n} + a_0(x)\,z = b(x)$ или, что то же самое,

$$z' + (1-n)\,a_0(x)\,z = (1-n)\,b(x)\,.$$

Это линейное уравнение, которое мы решать умеем.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y' + 2xy = 2xy^3$. Это уравнение Бернулли при $n = 3$. Разделив обе части уравнения на y^3, получаем $\frac{y'}{y^3} + \frac{2x}{y^2} = 2x$. Делаем замену $z = \frac{1}{y^2}$. Тогда $z' = -2\frac{y'}{y^3}$, и поэтому уравнение переписывается в виде $-z' + 4xz = 4x$. Решая это линейное уравнение методом вариации произвольной постоянной, получаем $z(x) = 1 + C_1 e^{2x^2}$, откуда $\frac{1}{y^2} = 1 + C_1 e^{2x^2}$ или, что то же самое,

$y = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + C_1 e^{2x^2}}}$. При делении на y^3 мы потеряли решение $y = 0$, которое в полученное решение не входит.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $2yy' - 2xy^2 = x^3$. Это уравнение получено из уравнения Бернулли $2y' - 2xy = x^3 y^{-1}$ при $n = -1$. Делаем замену $z = y^2$. Тогда $z' = 2yy'$, и поэтому уравнение переписывается в виде $z' - 2xz = x^3$. Это линейное уравнение. Решаем вначале соответствующее однородное уравнение. Имеем $z' - 2xz = 0$, $z = Ce^{x^2}$. Находим теперь решение уравнения $z' - 2xz = x^3$ в виде $z = C(x)e^{x^2}$. Подставляя в него z и z', получаем

$C'(x) = x^3 e^{-x^2}$, откуда $C(x) = \int x^3 e^{-x^2} dx$. Интегрируя по частям с $U = x^2,\ dV = x\exp(-x^2)\,dx$, имеем

$$C(x) = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + C_1.$$

Поэтому $z(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + C_1 e^{x^2}$, откуда $y^2 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + C_1 e^{x^2}$ или, что то же самое, $y = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + C_1 e^{x^2}}$.

Задание 5.3. Решить уравнения:

1) $y' - 3y = 2e^{5x}$; **2)** $y' + y\ \mathrm{tg}x = \sin x$; **3)** $y^2 y' - x^2 y^3 = x^2$.

Ответы: **1)** $y = e^{5x} + Ce^{3x}$; **2)** $y = -\cos x \ln|\cos x| + C\cos x$;

3) $y = \sqrt[3]{Ce^{x^3} - 1}$.

5.1.7. **Уравнения в полных дифференциалах**

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0. \qquad (5.15)$$

Если существует функция $u(x,y)$ такая, что

$$du(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy,$$

то уравнение (5.15) называется уравнением в полных дифференциалах.

В этом случае его можно записать в виде $du(x,y) = 0$. Тогда $u(x,y) = C$. Если разрешить последнее соотношение относительно y, то получим общее решение уравнения (5.15).

Пример 1. Дифференциальное уравнение $xdy + ydx = 0$ является уравнением в полных дифференциалах, так как $d(xy) = xdy + ydx$. Поэтому $xy = C$ есть общее решение этого уравнения.

Пример 2. Аналогично для уравнения $2xydx + x^2dy = 0$ выражение $x^2y = C$ есть общее решение, так как левая часть этого уравнения является дифференциалом функции $u(x,y) = x^2y$.

Как видим, уравнения в полных дифференциалах легко решаются, если знать функцию, дифференциалом которой является левая часть уравнения.

Вспоминая определение потенциальности поля $(M, N)^T$, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5.3. Уравнение (5.15) есть уравнение в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда поле $(M, N)^T$ потенциально или, что то же самое, криволинейный интеграл $\int\limits_L M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ не зависит от пути интегрирования.

Следствие. Если существуют непрерывные производные $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$, то уравнение (5.15) есть уравнение в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Следствие даёт возможность выяснить, является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах или нет. Теорема 5.3 позволяет найти решение уравнения в случае положительного ответа на предыдущий вопрос.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$. Так как $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$, $\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Поэтому, восстанавливая потенциал (подробнее о восстановлении потенциала смотри п. 4.5 примеры 1 и 2), получаем

$$u(x, y) = \int\limits_0^x (2x \cdot 0)\,dx + \int\limits_0^y (x^2 - y^2)\,dy = \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^y = x^2 y - \frac{y^3}{3}.$$

Тогда общий интеграл (общее решение) имеет вид $x^2 y - \frac{y^3}{3} = C$.

Пример 2. Уравнение $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$ также является уравнением в полных дифференциалах, так как

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{-y}) = -e^{-y}, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-2y - xe^{-y}) = -e^{-y}.$$

Поэтому, восстанавливая потенциал, имеем

$$u(x, y) = \int_0^x e^{-0} dx - \int_0^y (2y + xe^{-y})\,dy = x - y^2 + xe^{-y} - x = -y^2 + xe^{-y}.$$

Следовательно, общий интеграл (общее решение) уравнения равен

$$-y^2 + xe^{-y} = C.$$

Взяв дифференциал некоторой функции двух переменных и приравняв его к нулю, получим уравнение в полных дифференциалах. Сократив на общий множитель (если он есть), мы, скорее всего, получим уравнение, не являющееся уравнением в полных дифференциалах. Поэтому возникает обратная задача: нельзя ли подобрать функцию так, чтобы, умножив на неё уравнение в дифференциальной форме, получить уравнение в полных дифференциалах. Эта задача носит название задачи о нахождении интегрирующего множителя. Оказывается, что найти интегрирующий множитель можно, но соотношения, позволяющие сделать это, часто оказываются более сложными, чем само уравнение.

Задание 5.4. Найдите решения дифференциальных уравнений:

1) $(2xy + y^3)\,dx + (x^2 + 3xy^2)\,dy = 0$;

2) $y\sin(xy + y)\,dx + (x+1)\sin(xy + y)\,dy = 0$.

Ответы: **1)** $x^2y + xy^3 = C$; **2)** $\cos(xy + y) = C$.

5.1.8. **Приближенные методы решения дифференциальных уравнений**

Рассмотрим задачу Коши (5.3), (5.7) для дифференциального уравнения первого порядка: найти решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Пусть $y(x)$ — решение поставленной задачи Коши. Подставив это решение в уравнение (5.3), получим тождество $y'(x) \equiv f(x, y(x))$. Интегрируя это тождество по x, получаем

$$\int_{x_0}^{x} y'(x)\,dx = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx$$

или, что то же самое,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx\,. \tag{5.16}$$

Таким образом, мы показали, что всякое решение задачи Коши (5.3), (5.7) есть решение интегрального уравнения (5.16). С другой стороны, если $y(x)$ — дифференцируемое решение интегрального уравнения (5.16), то, дифференцируя (5.16) по x, получаем, что $y(x)$ — решение задачи Коши (5.3), (5.7).

Решение интегрального уравнения (5.16) будем искать с помощью метода последовательных приближений. Положим

$$y_0(x) = y_0\,, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\,dx\,. \tag{5.17}$$

Оператор $A: M \to M$, *отображающий метрическое пространство* M *в себя, называют сжимающим* [12], *если* $\rho(Ax_1, Ax_2) \le \alpha\rho(x_1, x_2)$, *где* ρ — *расстояние в* M, $0 < \alpha < 1$.

Сжимающие операторы имеют неподвижную точку, то есть точку, которая оператором A переводится в себя. Если линейное уравнение удаётся записать в виде $x = Ax$, в котором оператор A — сжимающий, то решение этого линейного уравнения можно найти с помощью последовательных приближений $x_{n+1} = Ax_n$, которые сходятся к решению уравнения $x = Ax$.

Таким образом, если оператор

$$(Ay)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx \tag{5.18}$$

— сжимающий [12], то последовательные приближения (5.17) сходятся к решению интегрального уравнения (5.16), а следовательно, и дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющему условию $y(x_0) = y_0$. Желающие могут познакомиться с доказательством сжимаемости оператора (5.18) в [12] или в приложении.

Пример. Найдём с помощью метода последовательных приближений решение уравнения $y' = y$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$. Подставляя $y(0) = 1$ в (5.17), получаем

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 1 + \int_0^x 1dx = 1 + x,$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x (1+x)\,dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \ \ldots, \quad y_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

С другой стороны, решая исходную задачу Коши, имеем $y = e^x$.

Таким образом, нами получено разложение функции e^x в ряд Тейлора в нуле (ряд Маклорена).

Перейдём теперь к изложению численного метода Эйлера решения задачи Коши (5.3), (5.7). Разобьём отрезок $[a,b]$, на котором мы ищем решение, на части точками $x_0 = a < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$. Положим

$$y_i = y(x_i), \ \ 0 \le i \le n, \ h_i = x_{i+1} - x_i, \ \ 0 \le i \le n-1 .$$

Так как по определению производной

$$y'(x_i) = \lim_{h_i \to 0} \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h_i},$$

то, заменяя производную $y'(x_i)$ конечной разностью $\dfrac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h_i} = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$ в уравнении (5.3), получаем $\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i} =$ $= f(x_i, y_i)$ или, что то же самое,

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i) . \tag{5.19}$$

Соотношение (5.19) является расчётной формулой метода Эйлера численного решения задачи Коши (5.3), (5.7). Вычислив $y_i, i = 0,1,\ldots,n$, получим таблицу значений решения в точках $x_i, i = 0,1,\ldots,n$. Для оценки погрешности на одном шаге сетки в методе Эйлера разложим точное решение $y(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_i до членов второго порядка малости

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + O(h^2) = y_i + hf(x_i, y_i) + O(h^2) .$$

Сравнивая с (5.19), видим, что погрешность формулы (5.19) на одном шаге равна $O(h^2)$. К сожалению, метод Эйлера накапливает ошибку от шага к шагу. Поэтому на практике пользуются либо модификациями метода Эйлера, например методом прогноза и коррекции [14], либо другими методами, в частности методом Рунге-Кутта [14].

5.2. Уравнения высших порядков

5.2.1. Общие сведения

Напомним, что дифференциальным уравнением n-го порядка мы назвали уравнение (5.1), то есть уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0\,.$$

Если это уравнение удаётся представить в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})\,, \qquad (5.20)$$

то его называют дифференциальным уравнением n – го порядка, разрешённым относительно старшей производной.

Решением уравнения n-го порядка будет семейство функций вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Для того чтобы из этого семейства выделить конкретное решение, нужно на решение φ наложить некоторые ограничения.

Чаще всего задают начальные условия, то есть условия вида

$$y(x_0) = y_0^0, \quad y'(x_0) = y_0^1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \qquad (5.21)$$

В этом случае задача о выделении конкретного решения носит название *задачи Коши*, которая заключается в нахождении решения уравнения (5.20), удовлетворяющего начальным условиям (5.21).

Определение. Будем говорить, что функция $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ удовлетворяет условию Липшица по переменным $z_1, z_2, \ldots, z_n$ в области D, если для любых двух точек $(x, z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1)$, $(x, z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2)$ из этой области выполнено неравенство

$$\left| f(x, z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1) - f(x, z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2) \right| \le L \sum_{i=1}^{n} \left| z_i^1 - z_i^2 \right|,$$

где L — некоторая константа, не зависящая от x и $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.4 (существования и единственности решения задачи Коши). Если функция $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условиям Липшица по переменным $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то найдётся окрестность точки x_0, в которой решение уравнения (5.20), удовлетворяющее начальным условиям (5.21), существует и единственно.

Множество D назовём выпуклым по $z_1, z_2, \ldots, z_n$, если для всяких двух точек $(x, z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1)$, $(x, z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2)$ из D этому множеству принадлежат и точки отрезка, их соединяющего, то есть точки вида $(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n)$, где $\bar{z}_i$ — числа, лежащие между z_i^1 и z_i^2, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Отметим, что если непрерывная на множестве D функция $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ имеет там же непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial z_i}$, множество D — ограничено, замкнуто и выпукло по $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то эта функция удовлетворяет на множестве D условию Липшица по $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Действительно, по теореме Лагранжа о конечных приращениях можем записать

$$\left| f(x, z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1) - f(x, z_1^2, z_2^2, \ldots, z_n^2) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n)}{\partial z_i} \left(z_i^1 - z_i^2 \right) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n)}{\partial z_i} \right| \left| z_i^1 - z_i^2 \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \max_{1 \le i \le n} \left(\max_{(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n) \in D} \left| \frac{\partial f(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n)}{\partial z_i} \right| \right) \left| z_i^1 - z_i^2 \right| =$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \left(\max_{(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n) \in D} \left| \frac{\partial f(x, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n)}{\partial z_i} \right| \right) \sum_{i=1}^{n} \left| z_i^1 - z_i^2 \right| .$$

Поэтому в теореме существования и единственности для уравнения n-го порядка вместо требования выполнения условия Липшица по $z_1, z_2, \ldots, z_n$ часто требуют, чтобы функция $f(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ имела непрерывные частные производные по переменным $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Теорема существования и единственности гарантирует, что при выполнении её условий через точку $(x_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1}) \in D$ проходит только одно решение уравнения (5.20). Если условия теоремы нарушаются в некоторой точке, то через неё может проходить больше чем одно решение (нарушается единственность) либо не проходить ни одного решения (нарушается существование).

В отличие от уравнений первого порядка для уравнений порядка n, кроме постановки задачи Коши, возможны другие постановки задач о выделении решений. Рассмотрим некоторые из них.

Многоточечная задача. Возьмем точки x_i, $1 \le i \le n$. Положим $y(x_i) = y_i$. Требуется найти решение уравнения (5.1) $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющее условиям

$$\alpha_i\, y(x_i) + \beta_i\, y'(x_i) = \gamma_i\,. \tag{5.22}$$

Краевая задача. Для уравнения второго порядка можно поставить задачу о нахождении решения уравнения $F(x, y, y', y'') = 0$, удовлетворяющего условиям

$$\begin{cases} \alpha_0\, y(x_0) + \beta_0\, y'(x_0) = \gamma_0, \\ \alpha_1\, y(x_1) + \beta_1\, y'(x_1) = \gamma_1. \end{cases} \tag{5.23}$$

Для поставленных задач можно сформулировать и доказать свои теоремы существования, единственности и другие результаты подобного типа о выделении конкретных решений. В частности, весьма интересной является задача Штурма-Лиувилля для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с однородными краевыми условиями, которая подробно рассматривается при разложении функций в обобщённый ряд Фурье по ортогональным системам функций.

Далее мы подробно рассмотрим задачу Коши.

Определение. Общим решением уравнения (5.20) назовём его решение $y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, содержащее n постоянных, которые можно подобрать так, чтобы удовлетворить любой заранее выбранный набор начальных условий (5.21).

5.2.2. **Уравнения, допускающие понижение порядка**

Выше нами были рассмотрены методы решения некоторых классов уравнений первого порядка. Возникает естественное желание свести уравнение порядка выше первого к уравнению более низкого порядка. В некоторых случаях это удаётся сделать. Рассмотрим их.

1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$ решаются последовательным интегрированием n раз

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right)dx + C_1(x - x_0) + C_2\ , \ \ldots$$

Пример 1. Решить уравнение $xy'' = 1$. Можем записать $y'' = \frac{1}{x}$, следовательно, $y' = \ln|x| + C_1$ и, интегрируя ещё раз, окончательно получаем $y = \int \ln|x|\,dx + C_1x + C_2 = x\ln|x| - x + C_1x + C_2$.

Пример 2. Решить уравнение $y''' = \sin 3x$. Интегрируя, получаем

$$y'' = -\frac{1}{3}\cos 3x + C_1\ ,\ y' = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2\ ,$$

$$y = \frac{1}{27}\cos 3x + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3\ .$$

2. В уравнениях вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, $k \geq 1$, (то есть не содержащих в явном виде неизвестной функции и некоторых её производных) порядок понижается с помощью замены переменной $y^{(k)} = z(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = z'(x)$, … …, $y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$, и мы получаем уравнение $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$ порядка $n-k$. Его решением является функция $F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$, или, вспоминая, что такое z, получаем уравнение $y^{(n-k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ рассмотренного в случае 1 типа.

Пример 3. Решить уравнение $x^2y'' = (y')^2$. Делаем замену $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получаем $x^2z' = z^2$. Разделяя переменные, получаем $-\frac{dz}{z^2} = -\frac{dx}{x^2}$. Интегрируя, имеем $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C_1 = \frac{1 + C_1x}{x}$ или, что то же самое, $z = \frac{x}{1 + C_1x}$. Последнее соотношение записывается в виде $y' = \frac{x}{1 + C_1x}$, откуда $dy = \frac{xdx}{1 + C_1x}$. Интегрируя при $C_1 \neq 0$, окончательно получаем $y = \frac{1}{C_1}x - \frac{1}{C_1^2}\ln|1 + C_1x| + C_2$. Если $C_1 = 0$, то $z = x$, $y' = x$, и $y = 0,5x^2 + C_3$. Кроме того, при делении на z^2 мы потеряли решение $y' = 0$ или, что то же самое, $y = C$.

Пример 4. Решить уравнение $xy'' = y'$. Делаем замену $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получаем $xz' = z$. Разделяя переменные, получаем $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$. Интегрируя, имеем $\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|$ или, что то же самое, $z = C_1x$. Последнее соотношение записывается в виде $y' = C_1x$, откуда $dy = C_1x\,dx$. Интегрируя, окончательно получаем $y = 0,5\,C_1x^2 + C_2$.

Пример 5. Решить уравнение $y''(e^x + 1) = y'e^x$. Делаем замену $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$. Подставляя в исходное уравнение, получаем $z'(e^x + 1) = ze^x$. Разделяя переменные, получаем $\frac{dz}{z} = \frac{e^xdx}{e^x + 1}$. Интегрируя, имеем $\ln|z| = \ln(e^x + 1) + \ln|C_1|$ или, что то же самое, $z = C_1(e^x + 1)$. Последнее соотношение записывается в виде $y' = C_1(e^x + 1)$, откуда $dy = C_1(e^x + 1)dx$. Интегрируя, окончательно получаем $y = C_1(e^x + x) + C_2$.

3. Следующим уравнением, допускающим понижение порядка, является уравнение вида $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, не содержащее в явном виде независимой переменной. Порядок уравнения понижается с помощью замены переменной $y' = p(y)$, где p — новая искомая функция, зависящая от y. Тогда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'\,p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(p'p) = \frac{dp'}{dx}p + p'\frac{dp}{dx} = \frac{dp'}{dy}\frac{dy}{dx}p + p'\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p''p^2 + (p')^2 p$$

и так далее. По индукции имеем $y^{(n)} = \varphi_{n-1}(p, p', \ldots, p^{(n-1)})$. Подставляя в исходное уравнение, понижаем его порядок на единицу.

Пример 6. Решить уравнение $(y')^2 + 2yy'' = 0$. Делаем стандартную замену $y' = p(y)$, тогда $y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$. Подставляя в уравнение, получаем $p^2 + 2y\frac{dp}{dy}p = 0$. Разделяя переменные, при $p \neq 0$ имеем $\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}$. Интегрируя, получаем $\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|$ или, что то же самое, $p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$. Тогда $y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$ или $\sqrt{y}\,dy = C_1\,dx$. Интегрируя последнее равенство, окончательно получаем $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2$. При разделении переменных мы могли потерять решение $y = C$, которое получается при $p = 0$ или, что то же самое, при $y' = 0$, но оно содержится в полученном выше решении при $C_1 = 0$.

Пример 7. Решить задачу Коши $y'' = 2yy'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Делаем замену $y' = p(y)$, тогда $y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$. Подставляя в уравнение, получаем $\frac{dp}{dy}p = 2yp$. В силу начальных условий $p \neq 0$ ($y'(0) = 1$), поэтому на p можно сократить. Разделяя переменные, имеем $dp = 2y\,dy$. Интегрируя, получаем $p = y^2 + C_1$. Тогда $y' = y^2 + C_1$. Учитывая начальные условия, получаем $C_1 = 1$. Поэтому $y' = y^2 + 1$ или $dy = (y^2 + 1)dx$. Разделяя в последнем равенстве переменные и интегрируя, окончательно получаем $\operatorname{arctg} y = x + C_2$. Учитывая начальные условия, получаем $C_2 = 0$. Таким образом, искомое решение есть $\operatorname{arctg} y = x$ или, что то же самое, $y = \operatorname{tg} x$.

4. Иногда удаётся подметить особенность, позволяющую понизить порядок уравнения способами, отличными от рассмотренных выше. Покажем это на примерах.

П р и м е р 8. Если обе части уравнения $yy''' = y'y''$ разделить на $yy'' \neq 0$, то получим уравнение $\frac{y'''}{y''} = \frac{y'}{y}$, которое можно переписать в виде $(\ln|y''|)' = (\ln|y|)'$. Из последнего соотношения следует, что $\ln|y''| = \ln|y| + \ln|C|$ или, что то же самое, $y'' = Cy$. Получилось уравнение на порядок ниже и рассмотренного ранее типа.

П р и м е р 9. Аналогично для уравнения $yy'' = y'(y'+1)$ имеем $\frac{y''}{y'+1} = \frac{y'}{y}$ или $(\ln|y'+1|)' = (\ln|y|)'$. Из последнего соотношения следует, что $\ln|y'+1| = \ln|y| + \ln|C_1|$ или $y' = C_1y - 1$. Разделяя переменные и интегрируя, получаем $\ln|C_1y - 1| = C_1x + C_2$. При делении $y(y'+1)$ мы потеряли решения $y = 0$ и $y = -x + C$, которые в ранее найденное решение не входят.

Рассмотренными в данном пункте методами решается задача 2 *из контрольной работы* 7.

5.2.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Рассмотрим множество $M[a,b]$ всех определённых на отрезке $[a,b]$ функций. На этом множестве введём операции:

1) сложения элементов $f_1, f_2 \in M[a,b]$ по правилу

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \text{для} \quad \forall x \in [a,b];$$

2) умножения элемента $f \in M[a,b]$ на скаляр $\alpha \in R$ по закону $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ для $\forall x \in [a,b]$.

Относительно введённых операций $M[a,b]$ является линейным пространством, так как выполнены все аксиомы линейного пространства [1,2,12].

Рассмотрим два подмножества множества $M[a,b]$:

$C[a,b]$ — множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций;

$C^n[a,b]$ — множество n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке функций.

Отметим, что имеет место поэлементное включение $C^n[a,b] \subset C[a,b] \subset M[a,b]$. Так как введённые линейные операции не выводят за пределы множеств $C[a,b]$ и $C^n[a,b]$ соответственно, то они являются линейными подпространствами пространства $M[a,b]$. Следовательно, как самостоятельные объекты $C[a,b]$ и $C^n[a,b]$ являются линейными пространствами. В отличие от рассмотренных в линейной алгебре пространств введённые пространства бесконечномерны.

Определим оператор $L:\ C^n\left[a,b\right]\to C\left[a,b\right]$ следующим образом:

$$L(y)=a_n(x)\,y^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_0(x)\,y=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\,y^{(k)}\ .$$

Докажем, что оператор L линеен. Действительно, так как для любых производных порядка k выполняется равенство

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2\right)=\alpha_1\frac{d^k y_1}{dx^k}+\alpha_2\frac{d^k y_2}{dx^k}\ ,$$

то можно записать

$$L\left(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}\left(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2\right)=$$

$$=\alpha_1\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^k y_1}{dx^k}+\alpha_2\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^k y_2}{dx^k}=\alpha_1 L(y_1)+\alpha_2 L(y_2).$$

Сравнивая крайние части этого равенства, убеждаемся в справедливости высказанного утверждения.

Уравнение вида $L(y)=b(x)$, где $b(x)$ — некоторая функция, а $L(y)$ — введённый выше оператор, называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка. Иногда будем пользоваться подробными записями этого уравнения

$$a_n(x)\,y^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=b(x) \qquad (5.24)$$

или

$$\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\,y^{(k)}=b(x)\ . \qquad (5.24а)$$

Так же как и для уравнений первого порядка, для линейных уравнений порядка n теорема существования и единственности имеет более конкретный вид.

Теорема 5.5. Пусть функции $a_k(x)$, $0 \le k \le n$, и $b(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$, $a_n(x) \ne 0$ для всякого x из $[\alpha,\beta]$ и пусть x_0 — некоторая точка этого отрезка. Тогда для любого набора начальных данных (5.21) $\left(y(x_0) = y_0^0,\ y'(x_0) = y_0^1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}\right)$ существует единственное решение уравнения (5.24), определённое на всём отрезке $[\alpha,\beta]$.

Доказательство этого результата опустим.

Отметим, что свойства решений линейных дифференциальных уравнений $L(y) = b(x)$ и $L(y) = 0$ подобны свойствам решений систем линейных алгебраических уравнений $Ax = B$ и $Ax = 0$. Приведём эти свойства.

Теорема 5.6 (о наложении решений). Если y_1, y_2 — решения уравнений $L(y) = b_1$ и $L(y) = b_2$ соответственно, то линейная комбинация $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ есть решение уравнения $L(y) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$.

Доказательство. В силу линейности оператора L имеем $L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если y_1 — решение уравнения $L(y) = b_1$, y_2 — решение уравнения $L(y) = 0$, то $y_1 + y_2$ — решение уравнения $L(y) = b_1$.

Следствие 2. Любая линейная комбинация решений уравнения $L(y) = 0$ снова есть решение этого уравнения.

Доказательство. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_m$ есть решения уравнения $L(y) = 0$. Тогда $L\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j L\left(y_j\right) = 0$.

Следствие доказано.

Следствие 3. Множество всех решений уравнения $L(y) = 0$ образует линейное подпространство пространства $C^n\left[a, b\right]$.

Доказательство. По предыдущему следствию линейные операции над решениями уравнения $L(y) = 0$ не выводят за пределы множества решений этого уравнения, что и доказывает следствие.

Напомним некоторые понятия линейной алгебры, которые нам потребуются в дальнейшем.

Определение. Система функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$ называется линейно зависимой на отрезке $[a,b]$, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не все из которых равны нулю, такие, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = 0$$

всюду на $[a,b]$, и линейно независимой, если такого ненулевого набора не существует.

Так же как и для систем векторов, для систем функций справедливы следующие ниже свойства.

1. Система функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$ линейно зависима на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда одна из них есть линейная комбинация остальных.

2. Всякая система функций, содержащая функцию, тождественно равную нулю на отрезке $[a,b]$, линейно зависима на $[a,b]$.

3. Всякая система функций, содержащая линейно зависимую на отрезке $[a,b]$ подсистему функций, линейно зависима на $[a,b]$.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для систем векторов и предлагаются в качестве упражнений.

Приведём примеры линейно зависимых и линейно независимых систем функций.

Пример 1. Система функций 1, $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ линейно зависима на всей числовой оси, так как по основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Пример 2. Функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ образуют линейно независимую систему на любом отрезке числовой прямой, так как по основной теореме алгебры [6] полином (многочлен) степени n, у которого хотя бы один коэффициент отличен от нуля, не может обращаться в нуль более чем в n точках вещественной прямой.

Пример 3. Для доказательства линейной независимости системы функций 1, $\cos x$, $\sin x$ требуется показать, что при любом ненулевом наборе констант $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ выражение $\alpha_1 + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \sin x$ не может тождественно равняться нулю.

Не всегда удаётся легко показать линейную зависимость или линейную независимость систем функций, пользуясь только определением. Для выяснения этого вопроса служит построенный ниже определитель.

Рассмотрим совокупность $m-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \mathrm{K} & y_m \\ y_1' & y_2' & \mathrm{K} & y_m' \\ \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \mathrm{K} & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского или вронскианом системы функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Определитель Вронского служит индикатором линейной зависимости системы функций.

> **Теорема 5.7.** Если система функций линейно зависима на $[\alpha,\beta]$, то её определитель Вронского $W(x)$ равен нулю во всякой точке отрезка $[\alpha,\beta]$.

Доказательство. Пусть система функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$ линейно зависима. Тогда по свойству 1 одну из них можно представить в виде линейной комбинации остальных. Подставляя эту линейную комбинацию в определитель Вронского, получаем, что при любом фиксированном x соответствующий столбец есть линейная комбинация остальных. Следовательно, по свойствам определителя, он равен нулю для всех $x \in [\alpha,\beta]$. Теорема доказана.

> **Теорема 5.8.** Если $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — линейно независимая система решений линейного однородного уравнения порядка n $L(y)=0$ с непрерывными на $[\alpha,\beta]$ коэффициентами и $a_n(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha,\beta]$, то её определитель Вронского $W(x)$ отличен от нуля для всех $x \in [\alpha,\beta]$.

Доказательство. Предположим, что существует точка $x \in [\alpha,\beta]$, в которой определитель Вронского $W(x_0)$ равен нулю. Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Её определитель есть определитель Вронского $W(x_0)$, и так как по предположению $W(x_0) = 0$, то система имеет нетривиальное решение $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ (хотя бы одно из α_j не равно нулю). Рассмотрим функцию $y(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x)$, где α_j — компоненты вектора α. Эта функция является решением уравнения $L(y) = 0$ по следствию 2 теоремы 5.6 о наложении решений. С другой стороны, имеем

$$y(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j(x_0) = 0,$$
$$y'(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j'(x_0) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что функция $y(x)$ удовлетворяет в точке x_0 системе нулевых начальных данных и по теореме 5.4 существования и единственности $y(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Это противоречит линейной независимости системы функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Теорема доказана.

Удостоверимся в существовании базиса в пространстве решений уравнения $L(y) = 0$.

Теорема 5.9. Для любого линейного однородного дифференциального уравнения порядка $L(y) = 0$ существует система, состоящая из n линейно независимых решений этого уравнения.

Доказательство. Возьмём матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} \qquad (5.25)$$

с определителем, отличным от нуля. Тогда строки и столбцы этой матрицы линейно независимы. Найдём такие решения

$y_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots n$, уравнения $L(y) = 0$, чтобы выполнялись соотношения $y_j^{(k)}(x_0) = a_j^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. По теореме 5.4 существования и единственности такой набор решений существует. Найденная система решений линейно независима, так как её определитель Вронского в точке x_0 совпадает с определителем матрицы (5.25). Теорема доказана.

Матрицу (5.25) можно взять единичную.

Теорема 5.10 (о виде общего решения линейного однородного дифференциального уравнения). Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимая система решений линейного однородного уравнения n-го порядка $L(y) = 0$, то любое его решение есть линейная комбинация этих решений, то есть

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j\, y_j(x), \tag{5.26}$$

и, следовательно, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — базис пространства решений уравнения $L(y) = 0$.

Доказательство. Нам нужно показать, что любое частное решение уравнения $L(y) = 0$ получается из (5.26), то есть для любого набора начальных данных (5.21) ($y(x_0) = y_0^0$, $y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$) существует набор чисел $C_1, C_2, \ldots, C_n$ такой, что соответствующее решение (5.26) удовлетворяет (5.21). Потребовав, чтобы решение (5.26) удовлетворяло условиям (5.21), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_j^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0) = y_0^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

определитель которой $W(x_0) \neq 0$, и поэтому существует единственное решение этой системы.

Таким образом, нами показано, что хотя само пространство $C^n[a,b]$ бесконечномерно, подпространство решений линейного однородного дифференциального уравнения конечномерно.

Определение. Любой базис пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

Так же, как и в линейной алгебре, имеет место следующий результат.

Теорема 5.11 (о виде общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения). Общее решение $y_{\text{он}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения $L(y) = b$ есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения $y_{\text{чн}}$ неоднородного уравнения, то есть

$$y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) .$$

Доказательство. Пусть $y_{\text{чн}}(x)$ — какое-нибудь фиксированное частное решение неоднородного линейного уравнения $L(y) = b$. Нам нужно показать, что для любого набора начальных данных $y(x_0) = y_0^0$, $y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$ существует набор чисел $C_1, C_2, \ldots, C_n$ такой, что решение

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x) + y_{\text{чн}}(x) ,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$, удовлетворяет этому набору начальных данных. Потребовав, чтобы данное решение удовлетворяло начальным условиям, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_j^{(k)}(x_0) + y_{\text{чн}}^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0) = y_0^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

или, что то же самое,

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_j^{(k)}(x_0) = y_0^k - y_{\text{чн}}^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 ,$$

определитель которой $W(x_0) \neq 0$, и поэтому существует единственное решение этой системы. Теорема доказана.

5.2.4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Поиск фундаментальной системы решений в общем случае является достаточно трудной задачей. Тем не менее, есть класс уравнений, для которого эта задача достаточно легко решается. К изучению этого класса мы и приступаем.

Линейное дифференциальное уравнение (5.24) назовём уравнением с постоянными коэффициентами, если в этом уравнении коэффициенты постоянны, то есть $a_i(x) = \text{const}$. Тогда соответствующее однородное уравнение $L(y) = 0$ будет иметь вид

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + \\ + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (5.27)$$

Решение уравнения (5.27) будем искать в виде $y = e^{rx}$. Тогда $y' = r\,e^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}, \ldots, y^{(n)} = r^n e^{rx}$. Подставляя в (5.27), получаем

$$L(e^{rx}) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{rx} = e^{rx} \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = e^{rx}(a_n r^n + \ldots + a_1 r + a_0) = 0 .$$

Так как e^{rx} нигде в нуль не обращается, то

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0 . \qquad (5.28)$$

Уравнение (5.28) называется характеристическим уравнением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

> **Теорема 5.12.** Функция $y = e^{rx}$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (5.27) тогда и только тогда, когда r есть корень характеристического уравнения (5.28).

Возможны нижеследующие случаи.

1. Все корни характеристического многочлена вещественны и различны. Обозначим их $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Тогда получим n различных решений

$$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x},\ \dots,\ y_n = e^{r_n x} \qquad (5.29)$$

уравнения (5.27). Докажем, что полученная система решений линейно независима. Рассмотрим её определитель Вронского

$$W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \dots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \dots & r_n e^{r_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \dots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Множитель $e^{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)x}$ в правой части $W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x})$ нигде в нуль не обращается. Поэтому осталось показать, что второй сомножитель (определитель) не равен нулю. Допустим, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда строки этого определителя линейно зависимы, т. е. существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k r_1^{k-1} = 0,\quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k r_2^{k-1} = 0,\ \dots,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k r_n^{k-1} = 0.$$

Таким образом, мы получили, что r_i, $i = 1, 2, \dots, n$ есть n различных корней полинома $(n-1)$-й степени, что невозможно. Следовательно, определитель в правой части $W(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x})$ не равен нулю и система функций (5.29) образует фундаментальную систему решений уравнения (5.27) в случае, когда корни характеристического уравнения различны.

Пример 1. Для уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$ корни характеристического уравнения $r^2 - 3r + 2 = 0$ равны $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Следовательно, фундаментальную систему решений составляют функции $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, а общее решение записывается в виде $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2. Среди действительных корней характеристического уравнения есть кратные. Предположим, что r_1 имеет кратность α, а все остальные различны. Рассмотрим вначале случай $r_1 = 0$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_\alpha r^\alpha = 0,$$

так как в противном случае r_1 не являлось бы корнем кратности α. Следовательно, дифференциальное уравнение имеет вид

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_\alpha y^{(\alpha)} = 0,$$

то есть не содержит производных порядка ниже α. Этому уравнению удовлетворяют все функции, у которых производные порядка α и выше равны нулю. В частности, таковыми являются все полиномы степени не выше $\alpha - 1$, например

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{\alpha-1}. \tag{5.30}$$

Покажем, что данная система линейно независима. Составив определитель Вронского этой системы функций, получим

$$W\left(1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha-1}\right) = \begin{vmatrix} 1 & x & K & x^{\alpha-1} \\ 0 & 1 & K & (\alpha-1)x^{\alpha-2} \\ K & K & K & K \\ 0 & 0 & K & (\alpha-1)! \end{vmatrix}.$$

Это определитель треугольного вида с отличными от нуля элементами, стоящими на главной диагонали. Поэтому он отличен от нуля, что и доказывает линейную независимость системы функций (5.30). Заметим, что в одном из примеров предыдущего параграфа мы доказывали линейную независимость системы функций (5.30) другим способом. Пусть теперь корнем характеристического уравнения кратности α является число $r_1 \neq 0$. Произведём в уравнении (5.27) $L(y) = 0$ замену $y = ze^{r_1 x} = z\exp(r_1 x)$. Тогда

$$y' = (z' + r_1 z)e^{r_1 x}, \quad y'' = (z'' + 2r_1 z' + r_1^2 z)e^{r_1 x}$$

и так далее. Подставляя полученные значения производных в исходное уравнение, снова получим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L_1(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^{(k)} = b_n z^{(n)} + b_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + b_1 z' + b_0 z = 0 \qquad (5.31)$$

с характеристическим уравнением

$$b_n k^n + b_{n-1} k^{n-1} + \ldots + b_1 k + b_0 = \sum_{j=0}^{n} b_j k^j = 0\,. \qquad (5.32)$$

Отметим, что если k — корень характеристического уравнения (5.32), то $z = e^{kx}$ — решение уравнения (5.31), а $y = ze^{r_1 x} = e^{(k+r_1)x}$ является решением уравнения (5.27). Тогда $r = k + r_1$ — корень характеристического уравнения (5.28). С другой стороны, уравнение (5.27) может быть получено из уравнения (5.31) обратной заменой $z = ye^{-r_1 x}$, и поэтому каждому корню характеристического уравнения (5.28) соответствует корень $k = r - r_1$ характеристического уравнения (5.32). Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между корнями характеристических уравнений (5.28) и (5.32), причём различным корням одного уравнения соответствуют различные корни другого. Так как $r = r_1$ — корень кратности α уравнения (5.28), то уравнение (5.32) имеет $k = 0$ корней кратности α. По доказанному ранее уравнение (5.31) имеет α линейно независимых решений

$$z_1 = 1, \quad z_2 = x, \quad z_3 = x^2, \quad \ldots, \quad z_\alpha = x^{\alpha-1},$$

которым соответствует α линейно независимых решений

$$y_1 = e^{r_1 x}, \; y_2 = xe^{r_1 x}, \; y_3 = x^2 e^{r_1 x}, \; \ldots, \; y_\alpha = e^{r_1 x} x^{\alpha-1} \qquad (5.33)$$

уравнения (5.27). Присоединяя полученную систему решений (5.33) к $n - \alpha$ решениям, соответствующим остальным корням характеристического уравнения, получим фундаментальную систему решений для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае наличия действительных кратных корней.

Пример 2. Для уравнения $y''' - 4y'' + 4y' = 0$ характеристическое уравнение $r^3 - 4r^2 + 4r = 0$ имеет корни $r = 0$ кратности 1 и $r = 2$ кратности 2, так как $r^3 - 4r^2 + 4r = r(r-2)^2$. Поэтому фундаментальной системой решений исходного уравнения является система функций $y_1 = 1$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = xe^{2x}$, а общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}$.

Пример 3. Для уравнения $y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 0$ характеристическое уравнение $r^5 - 2r^4 + r^3 = 0$ имеет корни $r = 0$ кратности 3 и $r = 1$ кратности 2, так как $r^5 - 2r^4 + r^3 = r^3(r-1)^2$. Поэтому фундаментальной системой решений исходного уравнения является система функций $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = e^x$, $y_5 = xe^x$, а общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^x + C_5xe^x$.

3. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные корни. Можно рассматривать комплексные решения, но для уравнений с действительными коэффициентами это не очень удобно. Найдём действительные решения, соответствующие комплексным корням. Так как мы рассматриваем уравнение с действительными коэффициентами, то для каждого комплексного корня $r_j = a + bi$ кратности α характеристического уравнения комплексно-сопряжённое ему число $r_k = a - bi$ также является корнем кратности α этого уравнения. Соответствующими этим корням парами решений являются функции $y_1^l = x^l e^{(a+bi)x}$ и $y_2^l = x^l e^{(a-bi)x}$, $l = 0, 1, \dots, \alpha - 1$. Вместо этих решений рассмотрим их линейные комбинации

$$\tilde{y}_1^l = \frac{y_1^l + y_2^l}{2} = x^l e^{ax}\cos bx, \quad \tilde{y}_2^l = \frac{y_1^l - y_2^l}{2i} = x^l e^{ax}\sin bx,$$

$l = 0, 1, \dots, \alpha - 1$, которые также являются решениями уравнения $L(y) = 0$. Так как преобразование, осуществляющее переход от y_1^l, y_2^l к $\tilde{y}_1^l, \tilde{y}_2^l$, $l = 0, 1, \dots, \alpha - 1$, невырожденное (с отличным от нуля определителем), то оно переводит линейно независимую систему решений в линейно независимую.

Пример 4. Для уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$ корни характеристического уравнения $r^2 - 2r + 5 = 0$ равны $r_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = 1 \pm 2i$, и фундаментальная система решений состоит из функций $y_1 = e^x \cos 2x$, $y_2 = e^x \sin 2x$, а общее решение имеет вид $y = C_1e^x \cos 2x + C_2e^x \sin 2x$.

Пример 5. Для уравнения $y''' - 4y'' + 13y' = 0$ корни характеристического уравнения $r^3 - 4r^2 + 13r = 0$ равны $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = 2 \pm 3i$, и фундаментальная система решений состоит из функций $y_1 = 1$, $y_2 = e^{2x}\cos 3x$, $y_3 = e^{2x}\sin 3x$, а общее решение имеет вид $y = C_1 + C_2 e^{2x}\cos 3x + C_3 e^{2x}\sin 3x$.

Пример 6. Для уравнения $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$ характеристическое уравнение $r^4 + 8r^2 + 16 = 0$ имеет корни $r = \pm 2i$ кратности 2, так как $r^4 + 8r^2 + 16 = (r^2+4)^2$. Поэтому фундаментальной системой решений исходного уравнения является система функций $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$, $y_3 = x\cos 2x, y_4 = x\sin 2x$, а общее решение имеет вид $y = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x\cos 2x + C_4 x \sin 2x$.

5.2.5. **Метод вариации произвольных постоянных решения линейных неоднородных уравнений**

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение (5.24)

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^{(k)} = b(x).$$

Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ — фундаментальная система решений, а $y = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j$ — общее решение соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$. Аналогично случаю уравнений первого порядка будем искать решение уравнения (5.24) в виде

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j . \tag{5.34}$$

Убедимся в том, что решение в таком виде существует. Для этого подставим функцию в уравнение. Для подстановки этой функции в уравнение найдём её производные. Первая производная равна

$$y' = \sum_{j=1}^{n} C_j'(x)\, y_j + \sum_{j=1}^{n} C_j(x)\, y_j' . \tag{5.35}$$

При вычислении второй производной в правой части (5.35) появится четыре слагаемых, при вычислении третьей производной — восемь слагаемых и так далее. Так как при подстановке решения (5.34) в уравнение (5.24) получается одно соотношение на n неизвестных функций, то остальные $n-1$ находятся в нашей власти. Поэтому первое слагаемое в (5.35) полагают равным нулю. С учётом этого вторая производная равна

$$y'' = \sum_{j=1}^{n} C_j'(x)\, y_j' + \sum_{j=1}^{n} C_j(x)\, y_j'' . \tag{5.36}$$

По тем же, что и раньше, соображениям в (5.36) также полагаем первое слагаемое равным нулю. Наконец, n-я производная равна

$$y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} C_j'(x)\, y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x)\, y_j^{(n)} . \tag{5.37}$$

Подставляя полученные значения производных в исходное уравнение, имеем

$$a_n(x)\sum_{j=1}^{n} C_j'(x)\, y_j^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} C_j(x)\, L(y_j) = b(x) . \tag{5.38}$$

Второе слагаемое в (5.38) равно нулю, так как функции y_j, $j=1,2,\ldots,n$, являются решениями соответствующего однородного уравнения $L(y)=0$. Объединяя (5.38) с полученными при вычислении производных условиями, получаем систему алгебраических уравнений для нахождения функций $C_j'(x)$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j^{(n-1)} = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}, \quad a_n(x) \neq 0. \end{cases} \tag{5.39}$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского фундаментальной системы решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответствующего однородного уравнения $L(y)=0$ и поэтому не равен нулю.

Следовательно, существует единственное решение системы (5.39). Найдя его, получим функции $C_j'(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, а следовательно, и $C_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Подставляя эти значения в (5.34), получаем решение линейного неоднородного уравнения.

Для $n = 2$, то есть для уравнения второго порядка, система уравнений (5.39) приобретает вид

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = \dfrac{b(x)}{a_2(x)}, \end{cases}$$

а для $n = 3$ система (5.39) записывается в виде

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_3'y_3' = 0, \\ C_1'y_1'' + C_2'y_2'' + C_3'y_3'' = \dfrac{b(x)}{a_3(x)}. \end{cases}$$

Изложенный метод называется методом вариации произвольной постоянной или методом Лагранжа.

Пример 1. Найдём общее решение уравнения $y'' + 4y' + 3y = \dfrac{2}{e^{2x} + 4}$. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y'' + 4y' + 3y = 0$. Корни его характеристического уравнения $r^2 + 4r + 3 = 0$ равны -1 и -3. Поэтому фундаментальная система решений однородного уравнения состоит из функций $y_1 = e^{-x}$ и $y_2 = e^{-3x}$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-3x}$. Для нахождения производных C_1', C_2' составляем систему уравнений (5.39)

$$\begin{cases} C_1'e^{-x} + C_2'e^{-3x} = 0, \\ -C_1'e^{-x} - 3C_2'e^{-3x} = \dfrac{2}{e^{2x} + 4}, \end{cases}$$

решая которую, находим $C_1' = \dfrac{e^x}{e^{2x} + 4}$, $C_2' = -\dfrac{e^{3x}}{e^{2x} + 4}$. Интегрируя полученные функции, имеем $C_1 = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{e^x}{2} + \tilde{C}_1$, $C_2 = -e^x + 2\mathrm{arctg}\,\frac{e^x}{2} + \tilde{C}_2$. Подставляя C_1 и C_2 в выражение для y, окончательно находим $y = -e^{-2x} + 2e^{-3x}\mathrm{arctg}\,\frac{e^x}{2} + \frac{1}{2}e^{-x}\mathrm{arctg}\,\frac{e^x}{2} + \tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 e^{-3x}$.

Пример 2. Найдём общее решение уравнения $y'' + 4y' + 3y = e^x$. Пример отличается от предыдущего лишь правой частью. Поэтому изменяется лишь система уравнений для нахождения производных C_1', C_2', приобретающая вид

$$\begin{cases} C_1' e^{-x} + C_2' e^{-3x} = 0, \\ -C_1' e^{-x} - 3C_2' e^{-3x} = e^x. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $C_1' = \frac{1}{2}e^{2x}$, $C_2' = -\frac{1}{2}e^{4x}$. Отсюда, интегрируя, имеем $C_1 = \frac{1}{4}e^{2x} + \tilde{C}_1$, $C_2 = -\frac{1}{8}e^{4x} + \tilde{C}_2$. Подставляя C_1 и C_2 в выражение для y, окончательно находим $y = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{8}e^x + \tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 e^{-3x} = \frac{1}{8}e^x + \tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 e^{-3x}$.

Пример 3. Найдём общее решение уравнения $y''' - 7y' - 6y = e^{5x}$. Корни характеристического полинома $r^3 - 7r - 6$ соответствующего однородного уравнения равны -2, -1, 3. Поэтому фундаментальная система решений однородного уравнения состоит из функций $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{3x}$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x)\,e^{-2x} + C_2(x)\,e^{-x} + C_3(x)\,e^{3x}$. Для нахождения производных C_1', C_2', C_3' составляем систему уравнений (5.39)

$$\begin{cases} C_1' e^{-2x} + C_2' e^{-x} + C_3' e^{3x} = 0, \\ -2C_1' e^{-2x} - C_2' e^{-x} + 3C_3' e^{3x} = 0, \\ 4C_1' e^{-2x} + C_2' e^{-x} + 9C_3' e^{3x} = e^{5x}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $C_1' = \frac{1}{5}e^{7x}$, $C_2' = -\frac{1}{4}e^{6x}$, $C_3' = \frac{1}{20}e^{2x}$. Интегрируя полученные функции, имеем $C_1 = \frac{1}{35}e^{7x} + \tilde{C}_1$,

$C_2 = -\frac{1}{24}e^{6x} + \tilde{C}_2$, $C_3 = \frac{1}{40}e^{2x} + \tilde{C}_3$. Подставляя C_1, C_2, C_3 в выражение для y, окончательно находим $y = \frac{1}{84}e^{5x} + \tilde{C}_1 e^{-2x} + \tilde{C}_2 e^{-x} + \tilde{C}_3 e^{3x}$.

5.2.6. **Уравнения с правой частью специального вида**

Как было показано ранее, общее решение $y_{\text{он}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения $L(y) = b(x)$ есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}$ соответствующего однородного уравнения $L(y) = 0$ и какого-либо частного решения $y_{\text{чн}}$ исходного неоднородного уравнения. Для уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида это частное решение может быть найдено достаточно просто. Займёмся этим вопросом.

Функцию $b(x) = \sum_{j=1}^{k} P_j(x)e^{\lambda_j x}$, где $P_j(x)$ — некоторые полиномы (многочлены), назовём квазиполиномом. По теореме о наложении решений, если y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, — решения уравнений $L(y) = b_j(x)$, то $y = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$ есть решение уравнения $L(y) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_j(x)$. Поэтому, не умаляя общности, будем считать, что правая часть уравнения $L(y) = b(x)$ с постоянными коэффициентами имеет вид $b(x) = P(x)e^{\lambda x}$. В частности, если $\lambda = \alpha + \beta i$ — комплексное число, то наиболее общей правой частью указанного типа является функция

$$b(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x), \tag{5.40}$$

у которой $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые полиномы. Справедлив следующий результат.

Теорема 5.13. Линейное дифференциальное уравнение

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots +$$
$$+ a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

с постоянными коэффициентами и правой частью вида (5.40) имеет частное решение

$$y(x) = x^k e^{\alpha x}(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x)\ ,$$

где $R(x)$, $S(x)$ — полиномы, подлежащие определению, степень которых равна максимальной степени полиномов $P(x)$, $Q(x)$; k — число, равное кратности корня $\alpha+\beta i$ характеристического полинома соответствующего однородного уравнения, если $\alpha+\beta i$ — корень этого полинома, и $k=0$, если не является корнем характеристического полинома.

Доказательство этого результата опустим.

Пример 1. Для уравнения $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$ корнями характеристического уравнения $r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$ являются $r = 2$ кратности 1 и $r = 1$ кратности 2. Следовательно, $\alpha + \beta i = 0$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому $k = 0$, и частное решение ищем в виде $y = cx + d$. Так как $y' = c$, $y'' = 0$, $y''' = 0$, то, подставляя в уравнение, получаем $5c - 2cx - 2d = 2x + 3$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $-2c = 2$, $5c - 2d = 3$. Следовательно, $c = -1$, $d = -4$ и $y = -x - 4$ — частное, а $y = -x - 4 + C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{2x}$ — общее решения уравнения.

Пример 2. Для уравнения $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (2x+3)e^{2x}$ число $\alpha + \beta i = 2$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение ищем в виде $y = x(cx+d)e^{2x}$.

Пример 3. Для уравнения $y'' + y = \cos x$ корнями характеристического полинома $r^2 + 1$ являются числа $r = \pm i$ кратности 1. Поэтому частное решение ищем в виде $y = x(a_1\cos x + a_2\sin x)$. Тогда

$$y' = (a_1 + a_2x)\cos x + (a_2 - a_1x)\sin x,$$

$$y'' = (2a_2 - a_1x)\cos x + (-2a_1 - a_2x)\sin x\ .$$

Подставляя в исходное уравнение и приводя подобные, получаем $2a_2\cos x - 2a_1\sin x = \cos x$, откуда $a_1 = 0$, $a_2 = 0,5$. Следовательно, $y = 0,5x\sin x$ — частное, $y = 0,5x\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x$ — общее решения уравнения.

Пример 4. Для уравнения $y''' - 7y' - 6y = 2x + 3$ корнями характеристического уравнения $r^3 - 7r - 6 = 0$ являются числа -2, -1, 3. Числа $\alpha + \beta i = 0$ среди этих корней нет. Поэтому частное решение ищем в виде $y = cx + d$.

Пример 5. Для уравнения $y'' + 4y = \sin 2x$ корнями характеристического полинома $r^2 + 4$ являются числа $r = \pm 2i$ кратности 1. Поэтому частное решение ищем в виде $y = x(a_1 \cos 2x + a_2 \sin 2x)$.

5.3. Системы дифференциальных уравнений

5.3.1. Общая теория

Система уравнений, связывающая независимую переменную, искомые функции и некоторое количество их производных, то есть система уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(n_k)}) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(n_k)}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n_2)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(n_k)}) = 0, \end{cases}$$

называется системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Если эта система разрешена относительно старших производных $y_1^{(n_1)}$, $y_2^{(n_2)}$, ..., $y_k^{(n_k)}$, то она называется системой в канонической форме и имеет вид

$$y_l^{(n_l)} = \varphi_l(x, y_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \ldots, y_2^{(n_2-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(n_k-1)}), \quad l = \overline{1, k}.$$

Эту систему путём введения новых неизвестных функций [9–11] можно привести к виду

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (5.41)$$

В этом случае система называется системой обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме или системой обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши.

Покажем, как это можно сделать для одного уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ n-го порядка. Полагаем $y = z_1$,

$z_2 = z_1' = y'$, $z_n = z_{n-1}' = y^{(n-1)}$. В результате можем составить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = z_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ z_{n-1}' = z_n, \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n). \end{cases}$$

Если ввести в рассмотрение векторы $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ и вспомнить [1,3], что производная вектор-функции по скалярному аргументу вычисляется по формуле $y' = (y_1', y_2', \dots, y_n')^T$, то систему (5.41) можно записать в векторной форме $y' = f(x, y)$, которая по виду совпадает с записью дифференциального уравнения первого порядка.

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.41) можно поставить задачу Коши: найти решение $(y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ системы (5.41), удовлетворяющее начальным условиям

$$(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0))^T = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)^T. \qquad (5.42)$$

В векторной форме условия (5.42) имеют вид $y(x_0) = y_0$.

Так же как и для дифференциальных уравнений, для систем дифференциальных уравнений справедлива теорема существования и единственности.

Теорема 5.14. Пусть в системе уравнений (5.41)

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

все функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$, непрерывны по совокупности переменных $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ в области D и удовлетворяют условию Липшица по переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$. Тогда найдётся окрестность точки x_0, в которой решение системы уравнений (5.41), удовлетворяющее начальным данным (5.42), существует и единственно.

Доказательство этого результата опустим.

Если функции f_i, $i=\overline{1,n}$, не зависят от x, то система (5.41) называется автономной. В этом случае обычно вместо x пишут t и систему записывают в виде

$$\frac{dy_i}{dt}=f_i(y_1,y_2,\ldots,y_n),\qquad i=1,2,\ldots,n,$$

или в векторной форме $y'=f(y)$. Если трактовать независимую переменную как время, то автономные системы отличаются тем, что их поведение не зависит от начала отсчёта переменной t, а зависит от начальной точки и времени, прошедшего с начала процесса. Действительно, сделав замену переменных $\tau=t-t_0$, получим

$$\frac{dy}{d\tau}=\frac{dy}{dt}=f(y(\tau)).$$

Более подробно с автономными системами можно ознакомиться в [9, 10].

В общем случае для решения систем имеются методы интегрируемых комбинаций и исключения неизвестных. Как указывалось ранее, любое уравнение порядка n можно свести к системе n уравнений в нормальной форме. Возможна и обратная процедура. На этой идее и основан метод исключения неизвестных. Разберём его на примерах.

Пример 1. Для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}4x'-y'+3x=\sin t,\\ x'+y=\cos t,\end{cases}$$

выражая y из второго уравнения, имеем $y=-x'+\cos t$, $y'=-x''-\sin t$. Подставляя в первое уравнение и приводя подобные, получаем уравнение $x''+4x'+3x=0$. Это линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Корни его характеристического уравнения $r^2+4r+3=0$ равны

$r_1 = -3, \quad r_2 = -1$. Поэтому $x = C_1e^{-3t} + C_2e^{-t}$. Подставляя в выражение для y, получаем $y = 3C_1e^{-3t} + C_2e^{-t} + \cos t$. В векторной форме то же самое будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 2. Найдём решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -9y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения y, получаем $y = -\frac{1}{9}x'$. Следовательно, $y' = -\frac{1}{9}x''$, и, подставляя во второе уравнение, имеем $x'' + 9x = 0$. Это линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Корни его характеристического полинома $r^2 + 9$ равны $r_{1,2} = \pm 3i$. Поэтому общее решение полученного уравнения есть $x = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t$. Подставляя в выражение для y, получаем $y = \frac{1}{3}C_1\sin 3t - \frac{1}{3}C_2\cos 3t$. В векторной форме то же самое будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} \cos 3t \\ \frac{1}{3}\sin 3t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\frac{1}{3}\cos 3t \end{pmatrix}.$$

5.3.2. **Системы линейных уравнений**

Если в системе (5.41) все функции f_i линейны по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то она называется линейной. В этом случае её можно переписать в виде

$$\begin{cases} y_1' = a_1^1(x)y_1 + a_2^1(x)y_2 + \ldots + a_n^1(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' = a_1^2(x)y_1 + a_2^2(x)y_2 + \ldots + a_n^2(x)y_n + b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_1^n(x)y_1 + a_2^n(x)y_2 + \ldots + a_n^n(x)y_n + b_n(x). \end{cases} \qquad (5.43)$$

Обозначая матрицу системы через $A(x)$, а вектор $(b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x))^T$ через $b(x)$, систему (5.43) можем переписать в матричной форме

$$y' = A(x)y + b(x). \tag{5.43а}$$

Будем по возможности пользоваться матричной формой записи. Если $b(x) = 0$, то получаем соответствующую однородную систему уравнений

$$y' = A(x)y\,. \tag{5.44}$$

Для систем линейных уравнений строится теория, полностью эквивалентная теории линейных уравнений порядка n. В частности, справедлива теорема о наложении решений и её следствия. В том числе и теорема о том, что множество решений однородной системы (5.44) образует линейное подпространство в пространстве дифференцируемых вектор-функций. Сформулируем и по возможности докажем эти результаты.

Так же как для векторов [1,2] и систем скалярных функций, для систем вектор-функций вводятся понятия их линейной зависимости и линейной независимости.

Определение. Система вектор-функций $y^1, y^2, \dots, y^m$ называется линейно зависимой на отрезке $[a,b]$, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не все из которых равны нулю, такие, что

$$\alpha_1 y^1 + \alpha_2 y^2 + \dots + \alpha_m y^m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y^m = 0$$

всюду на $[a,b]$, и линейно независимой, если такого ненулевого набора не существует.

Рассмотрим совокупность вектор-функций $y^1, y^2, \dots, y^n$. Определитель, составленный из их координат,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \dots & y_n^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^n & y_2^n & \dots & y_n^n \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского или вронскианом системы вектор-функций $y^1, y^2, \ldots, y^n$.

Так же как и для систем скалярных функций, определитель Вронского системы вектор-функций служит индикатором её линейной зависимости или линейной независимости.

Теорема 5.15. Если система вектор-функций линейно зависима, то её определитель Вронского $W(x)$ равен нулю.

Доказательство аналогично соответствующему доказательству для систем векторов [1, 2] и систем скалярных функций, приведённому в п. 5.2.3. Предлагается сделать это самостоятельно.

Теорема 5.16. Если $y^1, y^2, \ldots, y^n$ — линейно независимая совокупность решений однородной системы уравнений $y' = A(x)y$ с непрерывными на $[\alpha,\beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha,\beta]$, то её определитель Вронского $W(x)$ отличен от нуля для всех $x \in [\alpha,\beta]$.

Доказательство аналогично соответствующему доказательству для систем скалярных функций, приведённому в п. 5.2.3. Предлагается доказать эту теорему самостоятельно.

Удостоверимся в существовании базиса в пространстве решений системы уравнений $y' = A(x)y$.

Теорема 5.17. Для любой однородной системы линейных дифференциальных уравнений $y' = A(x)y$ порядка n с непрерывными на $[\alpha,\beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha,\beta]$ существует система линейно независимых решений этой системы уравнений.

Доказательство. Возьмём матрицу

$$\begin{pmatrix} q_1^1 & q_2^1 & K & q_n^1 \\ q_1^2 & q_2^2 & K & q_n^2 \\ K & K & K & K \\ q_1^n & q_2^n & K & q_n^n \end{pmatrix} \tag{5.45}$$

с определителем, отличным от нуля. Тогда строки и столбцы этой матрицы линейно независимы. Найдём такие решения $y^j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, системы уравнений $y' = A(x)y$, чтобы выполнялись соотношения $y_k^j(x_0) = q_k^j, \; k = 1, 2, \ldots, n$. По теореме существования и единственности решений такой набор решений существует. Найденная система решений линейно независима, так как её определитель Вронского в точке x_0 совпадает с определителем матрицы (5.45). Теорема доказана.

Матрицу (5.45) можно взять единичную.

Теорема 5.18 (о виде общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений). Если $y^1, y^2, \ldots, y^n$ — линейно независимая совокупность решений однородной системы уравнений $y' = A(x)y$ с непрерывными на $[\alpha, \beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$, то любое решение этой системы есть линейная комбинация решений $y^1, y^2, \ldots, y^n$, то есть

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y^j(x),$$

и, следовательно, $y^1, y^2, \ldots, y^n$ — базис пространства решений системы уравнений $y' = A(x)y$.

Доказательство. Нам нужно доказать, что для любого набора начальных данных (5.42) $(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0))^T =$ $= (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T$ можно подобрать константы $C_j, \; j = 1, 2, \ldots, n$ так, что соответствующее решение $y(x)$ удовлетворяет (5.42). Потребовав, чтобы решение $y(x)$ удовлетворяло условиям (5.42), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_k^j(x_0) = y_k(x_0) = y_k^0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

определитель которой $W(x_0) \neq 0$, и поэтому существует единственное решение этой системы.

Таким образом, нами показано, что подпространство решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений конечномерно.

Определение. Любой базис пространства решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка называется фундаментальной системой решений этой системы уравнений.

Так же как и в линейной алгебре, имеет место следующий результат.

Теорема 5.19 (о виде общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений). Общее решение $y_{\text{он}}$ линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений $y' = A(x)y + b(x)$ с непрерывными на $[\alpha,\beta]$ элементами матрицы $A(x)$ и компонентами вектора $b(x)$, $A(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha,\beta]$, есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}$ соответствующей однородной системы уравнений $y' = A(x)y$ и какого либо частного решения $y_{\text{чн}}$ неоднородной системы уравнений, то есть

$$y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Доказательство. Пусть $y_{\text{чн}}(x)$ какое-нибудь фиксированное частное решение неоднородной системы линейных уравнений $y' = A(x)\,y + b(x)$. Нам нужно показать, что для любого набора начальных данных

$$(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0))^T = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)^T$$

можно подобрать константы C_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ так, что решение

$y(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j\, y^j(x) + y_{\text{чн}}(x)$, где $y^1, y^2, \ldots, y^n$ — фундаментальная система решений соответствующей однородной системы уравнений $y' = A(x)y$, удовлетворяет этому набору начальных данных. Потребовав, чтобы данное решение удовлетворяло начальным условиям, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_k^j(x_0) + (y_{\text{чн}})_k(x_0) = y_k(x_0) = y_k^0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_k^j(x_0) = y_k^0 - (y_{чн})_k(x_0), \quad k = 1, 2, \ldots, n\ ,$$

определитель которой $W(x_0) \neq 0$, и поэтому существует единственное решение этой системы. Теорема доказана.

5.3.3. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Как и в случае линейных уравнений высших порядков, наиболее полно разработаны вопросы нахождения фундаментальной системы решений для однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} y_1' = a_1^1 y_1 + a_2^1 y_2 + \ldots + a_n^1 y_n, \\ y_2' = a_1^2 y_1 + a_2^2 y_2 + \ldots + a_n^2 y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_1^n y_1 + a_2^n y_2 + \ldots + a_n^n y_n \end{cases} \tag{5.46}$$

или в матричной форме

$$y' = Ay. \tag{5.46a}$$

Будем искать ненулевое решение системы (5.46) в виде

$$y = \alpha\, e^{rt} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T e^{rt} = (\alpha_1 e^{rt}, \alpha_2 e^{rt}, \ldots, \alpha_n e^{rt})^T. \tag{5.47}$$

Подставив это решение в (5.46), получаем равенство $\alpha\, r\, e^{rt} = A\,\alpha\, e^{rt}$, откуда, сокращая на e^{rt}, можем записать $\alpha r = A\alpha$ или $A\alpha - \alpha r = A\alpha - E\alpha r = (A - rE)\alpha = 0$. Последнее соотношение $(A - rE)\alpha = 0$ есть система для нахождения собственных чисел и собственных векторов матрицы A. Таким образом, $y = \alpha e^{rt}$ — решение системы (5.46) тогда, когда r — собственное число, а α — ему соответствующий собственный вектор матрицы A. Подробнее об определении и нахождении собственных векторов и собственных чисел смотри в книгах по линейной алгебре, в частности в [1] и [2]. Возможны два случая: 1) все собственные числа различны; 2) есть кратные собственные числа. Разберём эти возможности по отдельности.

В первом случае имеем n решений

$$y^1 = \alpha^1 e^{r_1 t},\ \ y^2 = \alpha^2 e^{r_2 t},\ \ \ldots,\ \ y^n = \alpha^n e^{r_n t}.$$

Эта система функций линейно независима, так как её определитель Вронского отличен от нуля. Действительно,

$$W(x) = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 e^{r_1 t} & \alpha_2^1 e^{r_2 t} & K & \alpha_n^1 e^{r_n t} \\ \alpha_1^2 e^{r_1 t} & \alpha_2^2 e^{r_2 t} & K & \alpha_n^2 e^{r_n t} \\ K & K & K & K \\ \alpha_1^n e^{r_1 t} & \alpha_2^n e^{r_2 t} & K & \alpha_n^n e^{r_n t} \end{vmatrix} = e^{(r_1+\ldots+r_n)t} \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & K & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & K & \alpha_n^2 \\ K & K & K & K \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & K & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

Так как система векторов $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ есть система собственных векторов матрицы A, отвечающая разным собственным числам, то она линейно независима [2]. Поэтому мы получили n линейно независимых решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений.

Во втором случае возможны два варианта. Пусть для собственного числа r_j кратности k имеется k линейно независимых собственных векторов $\alpha^{j_1}, \alpha^{j_2}, \ldots, \alpha^{j_k}$. Этот вариант ничем не отличается от предыдущего случая. Во втором варианте для собственного числа r_j кратности k имеется меньше чем k линейно независимых собственных векторов. Имеется два способа получения совокупности n линейно независимых решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений. Первый основан на приведении матрицы к жордановой форме и изложен в [9, 10]. Второй называется методом Эйлера и заключается в том, что для собственного числа r_j соответствующие решения находятся в виде $y = P_{k-1}(t)e^{r_j t}$, где $P_{k-1}(t)$ — вектор-функция, каждая координата которой есть полином степени не выше $k-1$ с неопределёнными коэффициентами, подлежащими определению. Подставляя это решение в (5.46), получаем соотношения для определения коэффициентов вектор-функции $P_{k-1}(t)$.

П р и м е р 1. Для линейной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -2x + y - 2z, \\ y' = \;\; x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 5z \end{cases}$ матрица $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа $r_1 = 3$ с соответствующим собственным вектором $\lambda_1 = (-1, 1, 3)^T$ и $r_{2,3} = -1$ кратности 2 с собственными векторами $\lambda_2 = (1, 1, 0)^T$ и $\lambda_3 = (2, 0, -1)^T$. Поэтому фундаментальная система решений состоит из функций $\lambda_1 e^{3t}, \lambda_2 e^{-t}, \lambda_3 e^{-t}$, а общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -e^{3t} \\ e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 2. Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -x + y - 2z, \\ y' = \;\; 4x + y, \\ z' = 2x + y - z \end{cases}$ матрица $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа $r_1 = 1$ с соответствующим собственным вектором $\lambda_1 = (0, 2, 1)^T$ и $r_{2,3} = -1$ кратности 2, которому соответствует только один собственный вектор $\lambda_2 = (-1, 2, 1)^T$. Поэтому линейно независимые решения, соответствующие собственному числу $r_{2,3} = -1$, ищем в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bt \\ q + nt \\ s + pt \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} (a + bt)e^{-t} \\ (q + nt)e^{-t} \\ (s + pt)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти соотношения в исходную систему и приводя подобные, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} n - 2p = 0, \\ 4b + 2n = 0, \\ 2b + n = 0, \\ b - q + 2s = 0, \\ 4a - n + 2q = 0, \\ 2a + q - p = 0 \end{cases}$$

для нахождения чисел a, b, q, n, s, p. Решая эту систему, имеем $b = -p$, $q = p - 2a$, $n = 2p$, $s = p - a$. Придавая свободным неизвестным значения $a = C_2$, $p = C_3$, получаем общее решение исходной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -te^{-t} \\ (1+2t)e^{-t} \\ (1+t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Для линейной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 4x - y \end{cases}$ матрица $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ имеет собственные числа $r_{1,2} = 1 \pm 2i$. Собственный вектор, отвечающий собственному числу $1 + 2i$, равен $\lambda_1 = (1, 1 - i)^T$. Для собственного числа $1 - 2i$ можно найти собственный вектор, а можно воспользоваться тем, что действительная и мнимая части решения $\lambda_1 e^{(1+2i)t}$ являются линейно независимыми решениями системы. Поэтому общее решение системы можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ e^t(\cos 2t + \sin 2t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \sin 2t \\ e^t(\sin 2t - \cos 2t) \end{pmatrix}.$$

5.3.4. **Метод вариации произвольных постоянных**

Рассмотрим неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений (5.43) $y' = A(x)y + b(x)$ или, что то же самое,

$$y' - A(x)\,y = b(x)\,. \tag{5.48}$$

Пусть имеется фундаментальная система решений $y^1, y^2, \ldots, y^n$ системы (5.44) $y' = A(x)y$. Тогда общее решение системы (5.44) записывается в форме $\sum_{j=1}^{n} C_j y^j$. Будем искать частное решение неоднородной системы уравнений (5.48) в виде

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y^j, \tag{5.49}$$

где $C_j(x)$ — функции, подлежащие определению. Дифференцируя вектор-функцию (5.49), получаем

$$y' = \sum_{j=1}^{n} C_j'(x)\, y^j + \sum_{j=1}^{n} C_j(x)\,(y^j)'. \tag{5.50}$$

Подставляя вектор-функцию (5.49) и её производную (5.50) в систему уравнений (5.43), получаем

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y^j + \sum_{j=1}^{n} C_j(x)(y^j)' - A(x)\left(\sum_{j=1}^{n} C_j(x) y^j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y^j + \sum_{j=1}^{n} C_j(x)\left((y^j)' - A(x) y^j\right) = b(x). \tag{5.51}$$

В этом соотношении слагаемое $\sum_{j=1}^{n} C_j(x)\left((y^j)' - A(x) y^j\right)$ равно нулю в силу того, что $y^1, y^2, \ldots, y^n$ — решения однородной системы уравнений (5.44) $y' = A(x) y$.

Поэтому правая часть в (5.51) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x)\, y^j = b(x) \tag{5.52}$$

или в координатной форме

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x)\, y_k^j = b_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.52а}$$

Так как определитель системы (5.52) есть определитель Вронского для фундаментальной системы решений $y^1, y^2, \ldots, y^n$ однородной системы уравнений (5.44) $y' = A(x)\, y$, то он отличен от нуля, и поэтому система (5.52) имеет единственное решение $C_j'(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, которое можно найти по формулам Крамера

$$C_j'(x) = \frac{W_j(x)}{W(x)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $W_j(x)$ — определитель, полученный из определителя $W(x)$ заменой столбца с номером j на столбец $b(x)$. Интегрируя последние равенства, окончательно получаем

$$C_j(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_j(x)}{W(x)} dx + \tilde{C}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Подставляя полученные значения $C_j(x)$ в (5.49), получаем общее решение $y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y^j(x) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{C}_j y^j(x)$ системы уравнений (5.43).

П р и м е р. Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -3x + 4y + e^{3t} + 2 \end{cases}$ соответствующая однородная система уравнений имеет вид $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -3x + 4y. \end{cases}$, Собственные числа её матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ равны $r_1 = 1, \ r_2 = 2$. Собственные векторы, отвечающие этим собственным числам, равны соответственно $(1,1)^T$ и $(2,3)^T$. Тогда фундаментальная система решений состоит из функций $(e^t, e^t)^T$ и $(2e^{2t}, 3e^{2t})^T$. Решение исходной системы ищем в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1(t)\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2(t)\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем систему

$$C_1'(t)\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2'(t)\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} + 2 \end{pmatrix}$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} C_1'(t)e^t + 2C_2'(t)e^{2t} = 0, \\ C_1'(t)e^t + 3C_2'(t)e^{2t} = e^{3t} + 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $C_1' = -2e^{2t} - 4e^{-t}$, $C_2' = e^t + 2e^{-2t}$. Проинтегрировав, имеем $C_1(t) = -e^{2t} + 4e^{-t} + \tilde{C}_1$, $C_2 = e^t - e^{-2t} + \tilde{C}_2$. Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{C}_1\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \tilde{C}_2\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{3t} + 2 \\ 2e^{3t} + 1 \end{pmatrix}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Предлагаемые ниже контрольные работы могут быть использованы для студентов заочной формы обучения. Их нумерация продолжает нумерацию контрольных работ пособий [2, 3].

Контрольная работа № 5

Вариант 5.1

Найти неопределённые интегралы:

1. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+3}\,dx$; **2.** $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$; **3.** $\int \operatorname{tg} x\,dx$;

4. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$; **5.** $\int x\cos 2x\,dx$; **6.** $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}\,dx$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; **8.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

9. $\int \frac{5x^3-14x^2+16x-24}{(x^2+4)(x-2)^2}\,dx$.

Вычислить определённые интегралы:

10. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$; **11.** $\int\limits_0^{\pi} \cos 2x \sin 3x\,dx$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

12. $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$; **13.** $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Выяснить сходимость несобственных интегралов:

14. $\int\limits_1^{\infty} \frac{x\cos x}{2+x^3}\,dx$; **15.** $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x}\sin^2 x}$.

16. Найти площадь области, ограниченной кривыми

$$y = 2x^2+1, \quad y = x+2.$$

17. Найти длину дуги кривой

$$x = 2\cos t,\quad y = 2\sin t,\quad z = t\ ,\quad 0 \le t \le \pi.$$

Вариант 5.2

Найти неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{x^3}{x^4+8}dx$; **2.** $\int \frac{1}{\cos^2 x\,(1+\mathrm{tg}x)}dx$; **3.** $\int \frac{\sin x}{3+\cos x}dx$;

4. $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}dx$; **5.** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$; **6.** $\int \frac{x^9}{\sqrt{1+x^5}}dx$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$; **8.** $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$; **9.** $\int \frac{-4x^2+5x+46}{(x^2+16)(x-3)^2}dx$.

Вычислить определённые интегралы:

10. $\int\limits_0^{\pi} x\cos 2x\,dx$; **11.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x \sin 5x dx$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

12. $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; **13.** $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Выяснить сходимость несобственных интегралов:

14. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+1}}dx$; **15.** $\int\limits_1^{4} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^2}}dx$.

16. Найти площадь области, ограниченной кривыми

$$y = x^2+1,\quad y = \sqrt{x}+1.$$

17. Найти длину дуги кривой

$$y = \sqrt{x^3}\ ,\quad 0 \le x \le 4.$$

Вариант 5.3

Найти неопределённые интегралы:

1. $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$; **2.** $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin x}}dx$; **3.** $\int \mathrm{ctg}\,x\,dx$;

4. $\int \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^3}dx$; **5.** $\int \ln(x^2+1)\,dx$; **6.** $\int \frac{x^{11}}{1+x^6}dx$;

7. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x+1}}dx$; **8.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$; **9.** $\int \frac{x^3+7x^2+9x+1}{(x^2+1)(x+1)^2}dx$.

Вычислить определённые интегралы:

10. $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin 3x\,dx$; **11.** $\int\limits_0^{\pi} \cos 3x\sin 7x\,dx$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

12. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3dx}{2+x^4}$; **13.** $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$.

Выяснить сходимость несобственных интегралов:

14. $\int\limits_1^{\infty} \frac{3x+1}{(2+x)^2\sqrt{x+1}}dx$; **15.** $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x^3}\sin x}dx$.

16. Найти площадь области, ограниченной линиями

$$y=(x-1)^2,\quad y=2(x-1).$$

17. Найти длину дуги кривой

$$x=2t-\sin 2t,\quad y=1-\cos 2t,\quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}.$$

Вариант 5.4

Найти неопределённые интегралы:

1. $\int xe^{x^2+1}dx$; **2.** $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}dx$; **3.** $\int \frac{\cos x}{2+\sin x}dx$;

4. $\int (2+e^x)^8 e^x dx$; **5.** $\int x \sin 3x\, dx$; **6.** $\int x^9 \sqrt[3]{1+x^5}\, dx$;

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-8}}$; **8.** $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$; **9.** $\int \frac{2x^2-4x-35}{(x^2+2x+2)(x+3)^2} dx$.

Вычислить определённые интегралы:

10. $\int\limits_0^{\sqrt{e-1}} \ln(x^2+1)\, dx$; **11.** $\int\limits_0^{\pi} \cos 2x \cos 3x\, dx$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

12. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; **13.** $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x \ln x}$.

Выяснить сходимость несобственных интегралов:

14. $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^2+6x+9}{x^5+4} dx$; **15.** $\int\limits_0^{1} \frac{\cos x}{x \sin x} dx$.

16. Найти площадь области, ограниченной линиями

$$y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1.$$

17. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

Вариант 5.5

Найти неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$; **2.** $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$; **3.** $\int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx$;

4. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} dx$; **5.** $\int x\ \mathrm{tg}^2 3x\, dx$; **6.** $\int \frac{x^{15}}{(1+x^8)^3} dx$;

7. $\int \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x-2}+1} dx$; **8.** $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$;

9. $\int \frac{x^3-10x^2+16x+20}{(x^2+4x+8)(x-2)^2}dx$.

Вычислить определённые интегралы:

10. $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$; **11.** $\int\limits_0^{\pi} \sin 4x \sin 3x\,dx$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

12. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$; **13.** $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

Выяснить сходимость несобственных интегралов:

14. $\int\limits_1^{\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}x}{2+x\sqrt{x+1}}dx$; **15.** $\int\limits_0^{1} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}\sin x}dx$.

16. Найти площадь области, ограниченной линиями

$$y=2x-x^2,\quad x+y=0.$$

17. Найти длину дуги кривой

$$\rho=e^{\varphi},\quad 0\le\varphi\le\ln 2.$$

Вариант 5.6

Найти неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{x^5}{x^6+7}dx$; **2.** $\int e^{\mathrm{tg}x}\frac{dx}{\cos^2 x}$; **3.** $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx$;

4. $\int \sqrt{1+e^{3x}}e^{3x}dx$; **5.** $\int x\ln x\,dx$; **6.** $\int \frac{x^7}{\sqrt{1+x^4}}dx$;

7. $\int \frac{\sqrt[5]{(x+1)^3}}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt[5]{(x+1)^7}}dx$; **8.** $\int \frac{dx}{\cos^3 x\sin^3 x}$;

9. $\int \frac{3x^3 - 8x^2 - 18x + 34}{(x^2 + 2x + 2)(x - 4)^2} dx$.

Вычислить определённые интегралы:

10. $\int_1^e \ln x \, dx$; **11.** $\int_{-\pi}^0 \cos 2x \sin 7x \, dx$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

12. $\int_0^\infty \frac{x^2}{5 + x^6} dx$; **13.** $\int_0^e \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Выяснить сходимость несобственных интегралов:

14. $\int_1^\infty \frac{2 + \sin x}{(6x + 1)\sqrt{x + 1}} dx$; **15.** $\int_0^2 \frac{\sqrt{\sin x}}{x(x + 2)} dx$.

16. Найти площадь области, ограниченной линиями

$$y = e^x, \quad y = e, \quad x = 0.$$

17. Найти длину дуги кривой

$$x = 5\cos^3 t, \quad y = 5\sin^3 t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Вариант 5.7

Найти неопределённые интегралы:

1. $\int \cos\frac{1}{x^2}\frac{1}{x^3} dx$; **2.** $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; **3.** $\int \frac{\sin x}{\cos x + 3} dx$;

4. $\int (3 + e^{2x})^5 e^{2x} dx$; **5.** $\int \ln x \, dx$; **6.** $\int x^3 \sqrt{1 + x^2} \, dx$;

7. $\int \frac{\sqrt[4]{x} + 1}{(\sqrt{x} + 4)\sqrt[4]{x^3}} dx$; **8.** $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$;

9. $\int \frac{-x^3 - 5x^2 + 7x + 4}{(x^2 + 2x + 2)(x - 1)^2} dx$.

Вычислить определённые интегралы:

10. $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$; **11.** $\int\limits_{-\pi}^0 \cos 2x \cos 8x\, dx$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

12. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2 + x + 8}$; **13.** $\int\limits_0^e \frac{\ln x\, dx}{x}$.

Выяснить сходимость несобственных интегралов:

14. $\int\limits_1^\infty \frac{x+1}{2x + x\sqrt{x}} dx$; **15.** $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+3x^2)}{x^3} dx$.

16. Найти площадь области, ограниченной линиями

$$x^2 + 8y - 16 = 0, \quad x^2 - 24y - 48 = 0.$$

17. Найти длину дуги кривой

$$y = \ln\cos x + 5, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$$

Вариант 5.8

Найти неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{x^3}{1+x^8} dx$; **2.** $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$; **3.** $\int \sqrt[3]{\sin x + 2} \cos x\, dx$;

4. $\int \sqrt[3]{1 - e^x}\, e^x dx$; **5.** $\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx$; **6.** $\int \frac{x^5}{1+x^3} dx$;

7. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1 + \sqrt[3]{x+3}} dx$; **8.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$;

9. $\int \frac{-2x^2 + 15x - 17}{(x^2 - 2x + 2)(x-3)^2} dx$.

Вычислить определённые интегралы:

10. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$; **11.** $\int\limits_{-\pi}^0 \cos 4x \sin 5x dx$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

12. $\int\limits_0^\infty \frac{x+2}{x^2+4x+8}dx$; **13.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Выяснить сходимость несобственных интегралов:

14. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln^5 x}}$; **15.** $\int\limits_0^3 \frac{x+3}{x\sin 2x}dx$.

16. Найти площадь области, ограниченной линиями

$$y = x^2, \quad y = \frac{1}{3}x^3.$$

17. Найти длину дуги кривой, заданной в полярной системе координат уравнением

$$\rho = 1 - \cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{4}.$$

Вариант 5.9

Найти неопределённые интегралы:

1. $\int e^{1/x}\frac{1}{x^2}dx$; **2.** $\int \frac{\ln x}{x}dx$; **3.** $\int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$;

4. $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{6x}}dx$; **5.** $\int \arcsin x\, dx$; **6.** $\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx$;

7. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}}dx$; **8.** $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$;

9. $\int \frac{4x^2+7x-23}{(x^2-4x+8)(x+1)^2}dx$.

Вычислить определённые интегралы:

10. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} x\,\mathrm{ctg}^2 x\,dx$; **11.** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \sin 6x \sin 7x\,dx$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

12. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4}$; **13.** $\int\limits_0^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Выяснить сходимость несобственных интегралов:

14. $\int\limits_3^{\infty} \frac{5x+3}{(x+1)^2\sqrt{x+4}}\,dx$; **15.** $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

16. Найти площадь области, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = \frac{1}{2}x^2.$$

17. Найти длину дуги кривой, заданной в полярной системе координат уравнением

$$\rho = 2 - 2\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$$

Вариант 5.10

Найти неопределённые интегралы:

1. $\int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$; **2.** $\int e^{\cos x} \sin x\,dx$;

3. $\int \sqrt[5]{\cos x + 1}\,\sin x\,dx$; **4.** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$;

5. $\int \mathrm{arctg}\,x\,dx$; **6.** $\int x^{11} \sqrt[5]{1+x^6}\,dx$;

7. $\int \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}+1}\,dx$; **8.** $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$;

9. $\int \frac{-2x^2-12x-28}{(x^2+4x+8)(x+2)^2}dx$.

Вычислить определённые интегралы:

10. $\int\limits_0^{\pi/20} x\,\mathrm{tg}^2 5x\,dx$; **11.** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x \sin 7x\,dx$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

12. $\int\limits_e^{\infty} \frac{\ln x\,dx}{x}$; **13.** $\int\limits_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

Выяснить сходимость несобственных интегралов:

14. $\int\limits_2^{\infty} \frac{3x+2}{x^3+8}dx$; **15.** $\int\limits_0^1 \frac{e^x-1}{x^3}dx$.

16. Найти площадь области, ограниченной линиями

$$y=0,\quad y=x-x^2\sqrt{x}.$$

17. Найти длину дуги кривой, заданной уравнением

$$y=\ln\sin x,\quad \frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}.$$

Контрольная работа № 6

Вариант 6.1

1. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$, если D — внутренность треугольника с вершинами в точках $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(2,2)$.

2. Изменить порядок интегрирования

$$\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2+x}}^{0} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{-x}}^{0} f(x,y)\,dy.$$

3. Вычислить площадь области, заданной неравенствами

$$x^2+(y-r)^2\le r^2,\quad x\le 0,\quad -2x+r\le y,$$

перейдя предварительно к полярным координатам.

4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x = 0, \quad z = 0, \quad y = 3x, \quad z = \sqrt{y}, \quad y = 2.$$

5. Вычислить интеграл (в цилиндрических или сферических координатах) $\iiint\limits_V yx\,dx\,dy\,dz$, где V — область, заданная неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \quad x^2 + y^2 + z^2 \ge 9, \quad z \ge 0$.

6. Найти работу силы $f(x,y) = (x^2 - y)\mathbf{i} - (x - y)\mathbf{j}$ по перемещению точки вдоль участка кривой $x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$.

7. Проверить, что поле

$$F = (6x + 7yz)\mathbf{i} + (6y + 7xz)\mathbf{j} + +(6z + 7xy)\mathbf{k}$$

потенциально, и восстановить потенциал.

8. Вычислить поток вектора $f = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности $x + y + 3z = 2$, лежащую в первом октанте.

9. Вычислить поток вектора $f = x^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $z = x^2 + y^2, \quad z = 1$.

Вариант 6.2

1. Вычислить $\iint\limits_D (2x - y)\,dx\,dy$, если D — внутренность треугольника с вершинами в точках A(0,2), B(1,0), C(2,4).

2. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{(x-2)^2} f(x,y)\,dy.$$

3. Вычислить площадь области, заданной неравенствами $(x + r)^2 + y^2 \le r^2, \; y \le 0, \; 2x + 2r \le y$, перейдя предварительно к полярным координатам.

4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x = 3, \; z = 0, \; y = 2x, \; z = y^2.$$

5. Вычислить интеграл (в цилиндрических или сферических координатах) $\iiint\limits_V xy\,dx\,dy\,dz$, где V — область, заданная неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, \; x \ge 0, \; y \ge 0, \; z \ge 0$.

6. Найти работу силы $f(x,y)=(x^2+y)\mathbf{i}-(2x-y)\mathbf{j}$ по перемещению точки вдоль участка кривой $y=x^2$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(2,4)$.

7. Проверить, что поле $f=2xe^y\mathbf{i}+x^2e^y\mathbf{j}$ потенциально, и восстановить потенциал.

8. Вычислить поток вектора $f=3x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ через часть поверхности $3x+2y+3z=8$, лежащую в первом октанте.

9. Вычислить поток вектора $f=x\mathbf{i}+2y^2\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $x^2+y^2=1,\ \ z=0,\ \ z=1$.

Вариант 6.3

1. Вычислить $\iint\limits_D (3x+5y)\,dx\,dy$, если D — внутренность треугольника с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$ $C(3,0)$.

2. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\ .$$

3. Вычислить площадь области, заданной неравенствами

$$(x+r)^2+y^2\le r^2,\ \ y\ge 0,\ \ 2x+2r\ge y,$$

перейдя предварительно к полярным координатам.

4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x=2,\ \ z=0,\ \ y=3x,\ \ z=\sqrt{y}.$$

5. Вычислить интеграл (в цилиндрических или сферических координатах) $\iiint\limits_V \frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$, где V — область, заданная неравенствами $x^2+y^2+z^2\le 4R^2,\ \ x^2+z^2\le 2Rx,\ \ y\ge 0$.

6. Найти работу силы $f(x,y)=(x+y)\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}$ по перемещению точки вдоль участка кривой $x=2t,\ \ y=t^3,\ \ 0\le t\le 2$.

7. Проверить, что поле $f=(3x^2+2y)\mathbf{i}+(2x-3)\mathbf{j}$ потенциально, и восстановить потенциал.

8. Вычислить поток вектора $f=x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+4z\mathbf{k}$ через часть поверхности $5x+y+2z=3$, лежащую в первом октанте.

9. Вычислить поток вектора $f = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 0$, $z \ge 0$.

Вариант 6.4

1. Вычислить $\iint\limits_D (2x + y)\,dx\,dy$, если D — внутренность треугольника с вершинами в точках A(1,1), B(2,2), C(0,3).

2. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{0}^{x+2} f(x, y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f(x, y)\,dy .$$

3. Вычислить площадь области, заданной неравенствами

$$(x - r)^2 + y^2 \le r^2, \quad y \le 0, \quad -2x + 2r \le y,$$

перейдя предварительно к полярным координатам.

4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x = 0, \quad z = 0, \quad x + y = 2, \quad z = y^2.$$

5. Вычислить интеграл (в цилиндрических или сферических координатах) $\iiint\limits_V 10z\,dx\,dy\,dz$, где V — область, заданная неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $x^2 + y^2 \le 3z^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. Найти работу силы $f(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - (x + y)\mathbf{j}$ по перемещению точки вдоль участка кривой $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$.

7. Проверить, что поле $f = (\ln y - 2x)\mathbf{i} + \dfrac{x}{y}\mathbf{j}$ потенциально, и восстановить потенциал.

8. Вычислить поток вектора $f = 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности $4x + 2y + 3z = 9$, лежащую в первом октанте.

9. Вычислить поток вектора $f = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Вариант 6.5

1. Вычислить $\iint\limits_D (3x-2y)\,dx\,dy$, если D — внутренность треугольника с вершинами в точках A(1,2), B(0,0), C(2,1).

2. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_0^{(x+2)^2} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_0^{-x} f(x,y)\,dy .$$

3. Вычислить площадь области, заданной неравенствами

$$x^2+(y-r)^2 \le r^2,\quad x\le 0,\quad -2x+r\ge y,$$

перейдя предварительно к полярным координатам.

4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x=0,\quad z=0,\quad x+y=4,\quad z=4\sqrt{y}.$$

5. Вычислить интеграл (в цилиндрических или сферических координатах) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, где V — область, заданная неравенствами $x^2+y^2\le 2z,\ \ z\le 2$.

6. Найти работу силы $f(x,y)=(2xy-y)\mathbf{i}-(x^2-y)\mathbf{j}$ по перемещению точки вдоль участка кривой $x=2y^2$ от точки A(0,0) до точки B(8,2).

7. Проверить, что поле $f=(x+2y)\mathbf{i}+(2x-y^2)\mathbf{j}$ потенциально, и восстановить потенциал.

8. Вычислить поток вектора $f=3x\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ через часть поверхности $2x+5y+z=6$, лежащую в первом октанте.

9. Вычислить поток вектора $f=2x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+3z^2\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $x^2+y^2=2-z,\ \ z=0$.

Вариант 6.6

1. Вычислить $\iint\limits_D (x-5y)dxdy$, если D — внутренность треугольника с вершинами в точках A(1,2), B(–1,3), C(3,4).

2. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2+x}}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f(x,y)\,dy .$$

3. Вычислить площадь области, заданной неравенствами

$$x^2 + (y - r)^2 \le r^2, \quad x \le 0, \quad 2x + r \ge y,$$

перейдя предварительно к полярным координатам.

4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$z = 0, \quad z = 3x, \quad y^2 = 2 - x.$$

5. Вычислить интеграл (в цилиндрических или сферических координатах) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$, где V — область, заданная неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \quad x \ge y, \quad z \ge 0, \quad y \ge 0.$

6. Найти работу силы $f(x,y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (x - y^2)\mathbf{j}$ по перемещению точки вдоль участка кривой $x = 4\cos t, \quad y = 2\sin t,$ $0 \le t \le \pi.$

7. Проверить, что поле $f = 4xy\mathbf{i} + (2x^2 - y)\mathbf{j}$ потенциально, и восстановить потенциал.

8. Вычислить поток вектора $f = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности $x + 7y + 3z = 11$, лежащую в первом октанте.

9. Вычислить поток вектора $f = x^2\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $x^2 + y^2 = 2 + z, \quad z = 0.$

Вариант 6.7

1. Вычислить $\iint\limits_D (2x - 3y)\,dx\,dy$, если D — внутренность треугольника с вершинами в точках $A(2,4)$, $B(1,3)$, $C(-1,2)$.

2. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy .$$

3. Вычислить площадь области, заданной неравенствами

$$(x - r)^2 + y^2 \le r^2, \quad y \ge 0, \quad -2x + 2r \ge y,$$

перейдя предварительно к полярным координатам.

4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$z = 0, \quad 2x - y = 0, \quad 4z = y^2, \quad x + y = 9.$$

5. Вычислить интеграл (в цилиндрических или сферических координатах) $\iiint\limits_V z^2 dx\, dy\, dz$, где V — область, заданная неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$, $z^2 \ge x^2 + y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. Найти работу силы $f(x, y) = x^2 y\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ по перемещению точки вдоль участка кривой $x^2 + y^2 = 4$ от точки A(0,2) до точки B(2,0).

7. Проверить, что поле $f = e^y\mathbf{i} + (x + 1)e^y\mathbf{j}$ потенциально, и восстановить потенциал.

8. Вычислить поток вектора $f = 5x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности $2x + 7y + 3z = 12$, лежащую в первом октанте.

9. Вычислить поток вектора $f = x^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $z + 3 = x^2 + y^2$, $z = 0$.

Вариант 6.8

1. Вычислить $\iint\limits_D (5x + 7y)\, dx\, dy$, если D — внутренность треугольника с вершинами в точках A(4,3), B(3,2), C(0,0).

2. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} f(x, y)\, dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x, y)\, dy .$$

3. Вычислить площадь области, заданной неравенствами

$$x^2 + (y - r)^2 \le r^2, \quad x \ge 0, \quad 2x + r \le y,$$

перейдя предварительно к полярным координатам.

4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$y = 0, \quad z = 0, \quad x + y = 2, \quad z = x^2.$$

5. Вычислить интеграл (в цилиндрических или сферических координатах) $\iiint\limits_V \frac{5(x^2 + y^2)}{3} dx\, dy\, dz$, где V — область, заданная неравенствами $9(x^2 + y^2) \ge z^2$, $x^2 + y^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

6. Найти работу силы $f(x,y) = xy^2\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$ по перемещению точки вдоль участка кривой $x = 4\cos t$, $y = 5\sin t$, $0 \le t \le 3\pi/2$.

7. Проверить, что поле $f = (3xy^2 + x^2)\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j}$ потенциально, и восстановить потенциал.

8. Вычислить поток вектора $f = 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности $2x + y + z = 2$, лежащую в первом октанте.

9. Вычислить поток вектора $f = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $x^2 + y^2 = 5 - z$, $z = 0$.

Вариант 6.9

1. Вычислить $\iint\limits_D (3x + 4y)\,dx\,dy$, если D — внутренность треугольника с вершинами в точках A(2,4), B(3,2), C(1,1).

2. Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^1 dx \int_{-x}^0 f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{x^2-2x}^0 f(x,y)\,dy\,.$$

3. Вычислить площадь области, заданной неравенствами

$$(x-r)^2 + y^2 \le r^2,\ \ y \le 0,\ \ 2x - 2r \le y,$$

перейдя предварительно к полярным координатам.

4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ z = y^2 + 1,\ \ x + y = 1.$$

5. Вычислить интеграл (в цилиндрических или сферических координатах) $\iiint\limits_V x^2 dx\,dy\,dz$, где V — область, заданная неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \le 16$, $x^2 + y^2 \le 4z$.

6. Найти работу силы $f(x,y,z) = (2xy - y)\mathbf{i} - (x - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ по перемещению точки вдоль участка кривой $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le \pi$.

7. Проверить, что поле $f = (3x + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ потенциально, и восстановить потенциал.

8. Вычислить поток вектора $f = 4x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через часть поверхности $2x + y + 3z = 6$, лежащую в первом октанте.

9. Вычислить поток вектора $f = 5x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 9, \ z = 0, \ (z \geq 0)$.

Вариант 6.10

1. Вычислить $\iint\limits_D (4x + 3y)\,dx\,dy$, если D — внутренность треугольника с вершинами в точках A(1,1), B(3,2), C(4,5).

2. Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{x}^{0} f(x,y)\,dy.$$

3. Вычислить площадь области, заданной неравенствами

$$x^2 + (y - r)^2 \leq r^2, \ \ x \geq 0, \ \ -2x + r \geq y,$$

перейдя предварительно к полярным координатам.

4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями

$$y = 0, \ \ z = 0, \ \ 2x + 3y = 6, \ \ z = x^2.$$

5. Вычислить интеграл (в цилиндрических или сферических координатах) $\iiint\limits_V 5x\,dx\,dy\,dz$, где V — область, заданная неравенствами $x^2 + y^2 \leq 4, \ \ x^2 + y^2 \geq 8z, \ \ z \geq 0$.

6. Найти работу силы $f(x,y) = (x + y)\mathbf{i} - (x + y^2)\mathbf{j}$ по перемещению точки вдоль участка кривой $x^3 = y$ от точки A(1,1) до точки B(2,8).

7. Проверить, что поле $f = (3x^2y + 1)\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$ потенциально, и восстановить потенциал.

8. Вычислить поток вектора $f = x\mathbf{i} - 3xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ через часть поверхности $3x + 5y + 2z = 10$, лежащую в первом октанте.

9. Вычислить поток вектора $f = x\mathbf{i} + 2y^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $z + 3 = x^2 + y^2, \ \ z = 0$.

Контрольная работа № 7

(Составлена Ельцовой Г.А.)

Вариант 7.1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $(x-y)\,dx + x\,dy = 0$;

б) $(e^{2x}+5)\,dy + ye^{2x}\,dx = 0$;

в) $2xy' - 3y = -(5x^2+3)y^3$.

2. Решить задачу Коши

$$y^3y'' = 1, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 0.$$

3. Для уравнения $y''' - 2y'' + y' = f(x)$:

а) найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_{oo};

б) найти частное решение неоднородного уравнения, если $f(x) = 4\cos x$; записать общее решение этого уравнения;

в) найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$;

г) записать частное решение с неопределёнными коэффициентами, если $f(x) = e^x(\sin x - 3x) + x^2$.

4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + te^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y + 2e^t. \end{cases}$$

Вариант 7.2

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $(x^2 - xy + y^2)\,dx - x^2dy = 0$;

б) $x\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} + y' = 0$;

в) $x^3dy + 3x^2y\,dx = \dfrac{x+2}{x-1}dx.$

2. Решить задачу Коши

$$y^4 - y^3y'' = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$$

3. Для уравнения $y^{(5)} + y''' = f(x)$:

а) найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_{oo};

б) найти частное решение неоднородного уравнения, если $f(x) = 24\sin 2x$; записать общее решение этого уравнения;

в) найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = 0$;

г) записать частное решение с неопределёнными коэффициентами, если $f(x) = e^x(\sin x - 3x) + x^2$.

4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 3y + 4te^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - 10e^t. \end{cases}$$

Вариант 7.3

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0;$

б) $2\sqrt{x^3}dy - \left(6y\sqrt{x} + 7\right)dx = 0;$

в) $y^2 + x^2y' = xyy'.$

2. Решить задачу Коши

$$yy'' = (y')^2 - (y')^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2.$$

3. Для уравнения $y''' - 4y'' + 3y' = f(x)$:

а) найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_{oo};

б) найти частное решение неоднородного уравнения, если $f(x) = e^{2x}(12x + 6)$; записать общее решение этого уравнения;

в) найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -19$;

г) записать частное решение с неопределёнными коэффициентами, если $f(x) = e^x \cos x + x^2 e^{3x} - 4$.

4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 6t. \end{cases}$$

Вариант 7.4

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $(1 + e^x)y' = ye^x$;

б) $\left(e^{2/x} + y\right)dx + x^2 dy = 0$;

в) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Решить задачу Коши

$$y'' + 2y(y')^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

3. Для уравнения $y^{(4)} - y = f(x)$:

а) найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_{oo};

б) найти частное решение неоднородного уравнения, если $f(x) = 4$; записать общее решение этого уравнения;

в) найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 3$, $y'''(0) = 3$;

г) записать частное решение с неопределёнными коэффициентами, если $f(x) = 2x(e^{-x} + e^x) + xe^{-x} \cos x$.

4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y + 2e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y - 3t. \end{cases}$$

Вариант 7.5

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $x(1+\ln x)y'+y=0$;

б) $e^{x^2}(dy-2xy\,dx)=x\,dx$;

в) $x^3y'=y(x^2+y^3)$.

2. Решить задачу Коши

$$y''=e^y,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=\sqrt{2}.$$

3. Для уравнения $y'''-2y''+4y'-8y=f(x)$:

а) найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_{oo};

б) найти частное решение неоднородного уравнения, если $f(x)=xe^x$; записать общее решение этого уравнения;

в) найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=5$, $y'(0)=0$, $y''(0)=3$;

г) записать частное решение с неопределёнными коэффициентами, если $f(x)=e^{2x}(\sin 2x-3x)+4\cos 2x$.

4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y+t,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=3x+4y+8t-3.\end{cases}$$

Вариант 7.6

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $x^2dy+2xy\,dx=\dfrac{2\,dx}{x^2+4}$;

б) $(e^x+8)dy=ye^x dx$;

в) $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

2. Решить задачу Коши

$$y'''=2(y''-1)\operatorname{ctg}x,\quad y(\pi/2)=0,\quad y'(\pi/2)=0,\quad y''(\pi/2)=1.$$

3. Для уравнения $y^{(4)} - 2y'' + y = f(x)$:

а) найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_{oo};

б) найти частное решение неоднородного уравнения, если $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$; записать общее решение этого уравнения;

в) найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 4$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 4$, $y'''(0) = 4$;

г) записать частное решение с неопределёнными коэффициентами, если $f(x) = x^2e^x + x(e^{-x} + \cos x)$.

4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y + 2e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y - 4e^{-2t}. \end{cases}$$

Вариант 7.7

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $(xy - 1)\,dx + x^2dy = 0$;

б) $y - xy' = 2(x + yy')$;

в) $x\,dy + y\,dx + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0$.

2. Решить задачу Коши

$$x^2y''' = (y'')^2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 1.$$

3. Для уравнения $y^{(4)} - 8y''' + 20y'' = f(x)$:

а) найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_{oo};

б) найти частное решение неоднородного уравнения, если $f(x) = 64\cos 2x$; записать общее решение этого уравнения;

в) найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$;

г) записать частное решение с неопределёнными коэффициентами, если $f(x) = e^{4x}(\cos 2x - x^2) - 5$.

4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y + \dfrac{3}{e^{4t}+1}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - y - \dfrac{5}{e^{4t}+1}. \end{cases}$$

Вариант 7.8

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $(xy - x^3)\,dx + dy = 0$;

б) $y' = \dfrac{y+1}{x}$;

в) $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$.

2. Решить задачу Коши

$$y''(e^x + 1) + y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

3. Для уравнения $y^{(4)} + y'' = f(x)$:

а) найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_{oo};

б) найти частное решение неоднородного уравнения, если $f(x) = 18x^2 + 37$; записать общее решение этого уравнения;

в) найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$;

г) записать частное решение с неопределёнными коэффициентами, если $f(x) = x\left(\sin x - 3x^2\right)$.

4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 4e^{4t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + 2. \end{cases}$$

Вариант 7.9

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $xy' + x^2 + xy - y = 0;$

б) $y - y' = y^2 + xy';$

в) $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}.$

2. Решить задачу Коши

$$2yy'' + 1 = (y')^2, \quad y\left(\frac{1}{3}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{1}{3}\right) = 2.$$

3. Для уравнения $y''' - 3y'' + 2y' = f(x)$:

а) найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_{oo};

б) найти частное решение неоднородного уравнения, если $f(x) = 8e^{4x}$; записать общее решение этого уравнения;

в) найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1,\ \ y''(0) = 1,\ \ y'''(0) = 1;$

г) записать частное решение с неопределёнными коэффициентами, если $f(x) = e^x(\sin 2x - 3x) + x^2.$

4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 4y + 3e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + 6e^{t}. \end{cases}$$

Вариант 7.10

1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $x^2y' = y(x + y);$

б) $2\left(x - y^2\right)dy = y\,dx;$

в) $2xy' = e^y + 2y'.$

2. Решить задачу Коши

$$2yy'' + (y')^2 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

3. Для уравнения $y''' - y'' - 2y' = f(x)$:

а) найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_{oo};

б) найти частное решение неоднородного уравнения, если $f(x) = 4\cos x$; записать общее решение этого уравнения;

в) найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$;

г) записать частное решение с неопределёнными коэффициентами, если $f(x) = e^{-x}(\sin x - 3\cos x) + x^2$.

4. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y + 3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + 8t - 11. \end{cases}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Числа вида $z = x + iy$ назовём комплексными числами. Назовём x действительной, а y мнимой частями комплексного числа $z = x + iy$ и будем обозначать их соответственно $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Два комплексных числа будем считать равными, если совпадают их действительные и мнимые части. На множестве комплексных чисел введём операции сложения и умножения по формулам:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Обратные операции имеют вид:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{(x_2)^2 + (y_2)^2}.$$

Каждому комплексному числу $z = x + iy$ сопоставим точку (x, y) плоскости R^2. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Операция сложения комплексных чисел совпадает с операцией сложения радиус-векторов точек (x, y). Для операции умножения комплексных чисел не находится соответствующей операции над векторами.

Если действительные числа отождествить с комплексными числами вида $x + 0 \cdot i$, то эти операции совпадают с обычными операциями над действительными числами, и поэтому комплексные числа являются расширением множества действительных чисел. Из введённых выше операций над комплексными числами следует, что для комплексного числа $i = 0 + i \cdot 1$ получаем $i^2 = i \cdot i = -1$.

Модулем $|z|$ комплексного числа $z = x + iy$ назовём длину радиус-вектора точки (x, y), то есть число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Числа $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ являются соответственно косинусом и синусом угла φ между радиус-вектором точки (x,y) и осью OX. Поэтому можем записать, что $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Эта форма записи числа z называется тригонометрической формой комплексного числа. Угол φ при этом называется аргументом числа z. Совершенно ясно, что числа, аргументы которых отличаются на 2π, совпадают. Среди всех значений аргумента числа z выбирают значение, называемое главным, и обозначают его $\arg z$. Наиболее удобным является выбор главного значения аргумента из промежутков $[0,2\pi)$, $[-\pi,\pi)$, $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$. В пакете Mathcad главное значение аргумента выбирается из промежутка $[-\pi,\pi)$. При выборе главного значения аргумента из промежутка $[0,2\pi)$ его находят по формулам

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x>0, y>0,\\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x<0,\\ 2\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{если } x>0, y<0.\end{cases}$$

Формулы для нахождения главного значения аргумента при выборе его из других промежутков предлагается написать самостоятельно. Все значения аргумента обозначают $\operatorname{Arg} z$. Отметим, что $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi$.

Полагая $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, можем записать $z=|z|e^{i\varphi}$. Эта форма записи числа z называется показательной формой записи комплексного числа. Так как $e^{-i\varphi}=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)=$ $=\cos\varphi-i\sin\varphi$, то, складывая и вычитая с $e^{i\varphi}$, получаем формулы Эйлера:

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Далее,

$$e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}=(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Поэтому

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1||z_2|\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Таким образом, мы получили, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Аналогично при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Как следствие этих результатов получаем формулы Муавра:

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

П р и м е р 1. Найдём $\sqrt[3]{1}$. Так как $|1| = 1$, $\arg 1 = 0$, то, используя вышеприведённую формулу, имеем $\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$. Придавая k последовательно значения $0,1,2$, получаем три значения корня кубического из единицы:

$$\sqrt[3]{1}_1 = 1, \quad \sqrt[3]{1}_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \sqrt[3]{1}_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

П р и м е р 2. Найдём $\sqrt{1+i}$. Так как $|1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, то $\sqrt{1+i} = \cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}$, $k = 0, 1$. Придавая k последовательно значения $0,1$, получаем два значения корня квадратного из $\sqrt{1+i}$:

$$\sqrt{1+i}_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}, \quad \sqrt{1+i}_2 = \cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
ПРИНЦИП СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

Достаточно интересной для практических применений является теорема Стефана Банаха о сжимающем операторе, называемая также принципом сжатых отображений и справедливая в полных метрических пространствах [12]. Прежде чем приступать к её изложению, дадим необходимые определения.

> *Определение* 1. Множество M элементов произвольной природы называется *метрическим пространством*, если каждой паре точек x,y из M поставлено в соответствие положительное число $\rho(x,y)$, удовлетворяющее условиям, называемым аксиомами метрического пространства:
>
> 1) $\rho(x,y) \geq 0$, причем $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
> 2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ для всех x,y из M;
> 3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ для всех x,y,z из M.

Примерами метрических пространств являются следующие.

1. Множество действительных чисел R с расстоянием $\rho(x,y) = |x-y|$. Справедливость аксиом 1 и 2 очевидна из свойств модуля. Из свойства $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ следует соотношение

$$|x-y| = |x-z-y+z| \leq |x-z| + |z-y|,$$

доказывающее справедливость аксиомы 3.

2. Множество R^n упорядоченных наборов из n вещественных чисел (векторов размерности n) $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с расстоянием

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}.$$

Для удобства, там где может возникнуть неоднозначность, будем обозначать это пространство R_2^n. Справедливость аксиомы 1 следует из того, что арифметический корень всегда неотрицателен и сумма квадратов действительных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Справедливость аксиомы 2 следует из равенств

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\eta_i-\xi_i)^2}=\rho(y,x).$$

Справедливость аксиомы 3 следует из неравенства Коши-Буняковского [1]. Соответствующее доказательство можно найти, например, в [1].

3. То же, что и в предыдущем примере, множество R^n векторов $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ размерности n с расстоянием

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|.$$

Для удобства, там где может возникнуть неоднозначность, будем обозначать это пространство R_1^n.

Справедливость аксиомы 1 следует из того, что модуль всегда неотрицателен и сумма модулей равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Справедливость аксиомы 2 следует из равенств

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|=\sum_{i=1}^{n}|\eta_i-\xi_i|=\rho(y,x).$$

Справедливость аксиомы 3 устанавливается следующей цепочкой вычислений:

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\zeta_i+\zeta_i-\eta_i|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left(|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|\right)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\zeta_i|+\sum_{i=1}^{n}|\zeta_i-\eta_i|=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

4. То же, что и в предыдущих двух примерах, множество R^n векторов $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ размерности n с расстоянием

$$\rho(x,y)=\max_{1\le i\le n}|\xi_i-\eta_i|.$$

В случае возникновения неоднозначности будем обозначать это пространство R_∞^n.

Справедливость аксиомы 1 следует из того, что модуль всегда неотрицателен и максимум конечного числа модулей равен нулю тогда и только тогда, когда каждый из модулей равен нулю. Справедливость аксиомы 2 следует из цепочки равенств

$$\rho(x, y) = \max_{1 \le i \le n} \left| \xi_i - \eta_i \right| = \max_{1 \le i \le n} \left| \eta_i - \xi_i \right| = \rho(y, x).$$

Далее, так как для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполнено неравенство

$$\left| \xi_i - \eta_i \right| \le \left| \xi_i - \zeta_i \right| + \left| \zeta_i - \eta_i \right|,$$

то для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$\left| \xi_i - \eta_i \right| \le \max_{1 \le i \le n} \left| \xi_i - \zeta_i \right| + \max_{1 \le i \le n} \left| \zeta_i - \eta_i \right|.$$

Поэтому выполнено неравенство

$$\max_{1 \le i \le n} \left| \xi_i - \eta_i \right| \le \max_{1 \le i \le n} \left| \xi_i - \zeta_i \right| + \max_{1 \le i \le n} \left| \zeta_i - \eta_i \right|,$$

означающее справедливость аксиомы 3.

Понятие расстояния позволяет ввести определение окрестности конечной точки в метрическом пространстве.

Определение 2. Окрестностью точки $x_0 \in M$ назовем множество точек $U_\varepsilon(x_0) = \left\{ x \in M : \rho(x_0, x) < \varepsilon \right\}$.

Тогда, по аналогии с определением предела последовательности в R^n [3], можем ввести следующее ниже определение предела последовательности точек метрического пространства.

Определение 3. Точка A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ при n, стремящемся к бесконечности ($A = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует N, зависящее от выбора ε, такое, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $\rho(A, a_n) < \varepsilon$.

Последовательность, имеющую предел A, назовем сходящейся. Будем при этом говорить, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке A. Если же предела не существует, то последовательность назовем расходящейся. Так как бесконечно удаленная точка не является элементом из R, то числовая последовательность, имеющая пределом ∞, является расходящейся.

Определение 4. Последовательность метрического пространства X называется фундаментальной, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n, m > N$ выполнено неравенство $\rho(a_m, a_n) < \varepsilon$.

Теорема. Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Доказательство. Так как $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для всех $n, m > N$ выполнены неравенства $\rho(A, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(A, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, поэтому

$$\rho(a_m, a_n) \le \rho(A, a_n) + \rho(A, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, то есть существуют метрические пространства, в которых не каждая фундаментальная последовательность имеет предел. Например во множестве рациональных чисел Q с тем же, что и в R, расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$, любая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к иррациональному числу, предела в Q не имеет.

Определение 5. Метрическое пространство X называется полным, если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится.

Приведённые выше примеры 1,2,3,4 метрических пространств являются полными метрическими пространствами.

Если в линейном пространстве $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций (см. п.5.2.3) ввести расстояние по формуле

$$\rho(x, y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| ,$$

то это пространство становится полным метрическим пространством. Заметим, что пространство, полное в одной метрике, может не быть полным в другой метрике. Если в $C[a,b]$ ввести расстояние по формуле $\rho(x, y) = \int |x(t) - y(t)| dt$, то в этой метрике пространство не является полным. Соответствующий пример последовательности непрерывных функций, сходящейся в этой метрике к разрывной функции, можно найти в книгах по функциональному анализу, например в [12].

Теорема (о сжимающем операторе). Пусть на полном метрическом пространстве X задан оператор $A : X \to X$ (то есть переводящий X в себя) такой, что для $\forall x, y \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y) , \qquad (1)$$

где $0 < \alpha < 1$ и не зависит от x и y. Тогда существует единственная точка x_0 такая, что

$$Ax_0 = x_0 .$$

Оператор A, обладающий свойством (1), называется сжимающим, а точка x_0 — неподвижной точкой оператора A.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ — произвольная точка. Зафиксируем её на процесс дальнейших рассуждений и положим

$$x_1 = Ax, x_2 = Ax_1, \dots, x_n = Ax_{n-1}, \dots .$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ — фундаментальна. Действительно,

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ax, Ax_1) \le \alpha\rho(x, x_1) = \alpha\rho(x, Ax) ,$$

$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Ax_1, Ax_2) \le \alpha\rho(x_1, x_2) \le \alpha^2\rho(x, x_1) = \alpha^2\rho(x, Ax) ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^n\rho(x, Ax) .$$

Далее,

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \le$$

$$\le \alpha^n(1 + \alpha + \dots + \alpha^{p-1})\rho(x, Ax) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x, Ax) . \qquad (2)$$

Так как $0 < \alpha < 1$, то

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, Ax) , \qquad (3)$$

откуда и следует утверждение о фундаментальности последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Так как X — полное пространство, то существует элемент $x_0 \in X$ такой, что

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Докажем, что $Ax_0 = x_0$. Для этого достаточно показать, что $\rho(x_0, Ax_0) = 0$. Действительно,

$$\rho(x_0, Ax_0) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, Ax_0) = \rho(x_0, x_n) + \rho(Ax_0, Ax_{n-1}) \le$$

$$\le \rho(x_0, x_n) + \alpha\rho(x_0, x_{n-1}) .$$

Так как $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполнены неравенства $\rho(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \rho(x_0, x_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$, и, следовательно, неравенство $\rho(x_0, Ax_0) < \varepsilon$. В силу произвольности ε из последнего неравенства следует, что $\rho(x_0, Ax_0) = 0$, и поэтому $Ax_0 = x_0$.

Докажем теперь единственность неподвижной точки у оператора сжатия. Предположим, что существуют два неподвижных элемента $x_0, y_0 \in X$ оператора A, то есть таких, что $Ax_0 = x_0$, $Ay_0 = y_0$. Тогда

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \le \alpha\rho(x_0, y_0).$$

Если теперь допустить, что $\rho(x_0, y_0) > 0$, то из последнего неравенства следует, что $\alpha \ge 1$, что противоречит условию $0 < \alpha < 1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Переходя в (2) к пределу при p, стремящемся к ∞, получаем неравенство (3), служащее оценкой ошибки n-го приближения и одновременно оценкой скорости сходимости.

Замечание 1. Построение последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно начинать с любой точки x. Выбор x будет сказываться лишь на быстроте сходимости $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ к x_0.

Замечание 2. Условие $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y)$, $0 < \alpha < 1$, нельзя заменить на более слабое $\rho(Ax, Ay) \le \rho(x, y)$, и даже на $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$. Соответствующий пример смотри в [16] на странице 63.

Принцип сжатых отображений применяется для доказательства сходимости итерационных процедур, то есть процедур вида $x_{n+1} = Ax_n$ с соответственно подобранным оператором A.

Пусть $A : R^n \to R^n$ — линейный оператор. Тогда $Ax + b = 0$ — система n линейных уравнений с n неизвестными. Рассмотрим оператор $B : R^n \to R^n$, действующий по формуле $Bx = Ax + b$. При $b \ne 0$ B — оператор, полученный из линейного оператора A сдвигом на вектор b. При $b = 0$ оператор B совпадает с оператором A. Найдем условия сжимаемости оператора B при различных метриках в пространстве R^n. Для R_1^n имеем

$$\rho(Bx, By) = \rho(Ax + b, Ay + b) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|(Ax)^i + b_i - (Ay)^i - b_i\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j - \sum_{j=1}^{n} a_j^i y^j\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_j^i \left(x^j - y^j\right)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_j^i\right|\left|x^j - y^j\right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_j^i\right|\right)\left|x^j - y^j\right| \le \sum_{j=11}^{n}\max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_j^i\right|\right)\left|x^j - y^j\right| =$$

$$= \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_j^i\right| \cdot \sum_{j=1}^{n}\left|x^j - y^j\right| = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_j^i\right| \rho(x,y) .$$

Таким образом, мы получили условие сжимаемости оператора B, а следовательно, и оператора A:

$$\max_{1\le i\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_j^i\right| < 1 .$$

Для R_∞^n условие сжимаемости оператора B, а следовательно, и оператора A имеет вид

$$\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_j^i\right| < 1 .$$

Для R_2^n условие сжимаемости оператора B, а следовательно, и оператора A

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_j^i\right)^2 < 1 .$$

Соответствующие вычисления предлагается проделать самостоятельно или посмотреть в [12].

Подводя итоги, получаем, что если систему n линейных уравнений с n неизвестными удается записать в форме $x = Ax + b$ с матрицей A, удовлетворяющей одному из полученных условий сжимаемости оператора A, то, по теореме о сжимающем операторе, последовательные приближения $x_{n+1} = Ax_n + b$ сходятся к точке x_0, являющейся решением данной системы линейных уравнений. Соответствующий процесс называется итерационным.

На этой идее основаны методы простой итерации и его модификации (метод Зейделя).

Пусть теперь функция $f(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (см. п.5.1.4) решения задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, то есть непрерывна по совокупности переменных в некоторой области D и удовлетворяет в ней условию Липшица по y. Перейдём к эквивалентному интегральному уравнению $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$. Рассмотрим оператор, действующий по формуле $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$. Этот оператор переводит непрерывную функцию в непрерывную. Получим условия сжимаемости оператора B в метрике пространства C[a,b]. Имеем

$$\rho(By_1, By_2) = \max_{x\in[a,b]} \left|y_1(x) - y_2(x)\right| =$$

$$= \max_{x\in[a,b]} \left| \int\limits_{x_0}^{x} \big(f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\big)dt \right| \le$$

$$\le \max_{x\in[a,b]} \int\limits_{x_0}^{x} \left|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\right| dt \le$$

$$\le \max_{x\in[a,b]} \int\limits_{x_0}^{x} L\left|y_1(t) - y_2(t)\right| dt \le L\left|b-a\right| \max_{x\in[a,b]} \left|y_1(x) - y_2(x)\right|.$$

Таким образом, если $L|b-a| < 1$, то оператор B — сжимающий. Тогда, по теореме о сжимающем операторе, решение интегрального уравнения $y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x,y)dx$, а следовательно, и задачи Коши $y' = f(x,y)$ $y(x_0) = y_0$ существует и единственно на отрезке [a,b].

ПРИЛОЖЕНИЕ 3
ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int 0\,dx = C$;
2. $\int 1\,dx = x + C$;
3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$;
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
5. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + \tilde{C}$;

5a. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + \tilde{C}$;

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + \tilde{C}$;

6a. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + \tilde{C}$;

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

7a. $\int e^x dx = e^x + C$;

8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
9. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
12. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$;
13. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$;
14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;
15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;
16. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$;
17. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4
ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax) = \frac{1}{a}d(ax+b)$, где a и b — некоторые числа. В частности $dx = \frac{1}{2}d(2x) = \frac{1}{2}d(2x+b) = \frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}d(3x+b)$ и так далее;

2. $x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}d\left(x^{\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1}d\left(x^{\alpha+1}+b\right)$, $\alpha \neq -1$. В частности $xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2}d\left(x^2+b\right)$, $x^2dx = \frac{1}{3}d\left(x^3\right) = \frac{1}{3}d\left(x^3+b\right)$,

$\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right) = -d\left(\frac{1}{x}+b\right)$, $\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}+b\right)$,

$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right) = 2d\left(\sqrt{x}+b\right)$;

3. $\frac{dx}{x} = d(\ln x) = d(\ln x + b) = \frac{1}{a}d(a\ln x + b)$;

4. $e^x dx = d(e^x) = d(e^x + b)$;

5. $\cos x dx = d\sin x = d(\sin x + b)$;

6. $\sin x dx = -d\cos x = -d(\cos x + b)$;

7. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\,\mathrm{tg}x = d(\mathrm{tg}x + b)$;

8. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\,\mathrm{ctg}x = -d(\mathrm{ctg}x + b)$;

9. $\frac{dx}{1+x^2} = d(\mathrm{arctg}\,x) = -d(\mathrm{arcctg}\,x)$;

10. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$.