**Томский политехнический университет**
**Областной тур Всероссийской олимпиады по математике**
**24 апреля 2022 года • 2-4 курсы**

## Решения задач

**Задача № 1.** Решить задачу Коши $x'(t)=\dfrac{Ax(t)}{B+(C-A)t}$, $x(0)=D$, где $A,B,C,D>0$.

**Решение.** Запишем уравнение в виде
$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{A\,dt}{B+(C-A)t}$.

Если $C\neq A$, получим $\ln|x|=\ln|B+(C-A)t|\dfrac{A}{C-A}+\ln\tilde{C}$, где $\tilde{C}$ – константа. Тогда

$x=\tilde{C}[B+(C-A)t]^{\frac{A}{C-A}}$. Из начальных условий $x(0)=D$ найдём $\tilde{C}=\dfrac{D}{B^{\frac{A}{C-A}}}$ и $x=D\left(1+\dfrac{C-A}{B}t\right)^{\frac{A}{C-A}}$.

Если $C=A$, получим $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{A\,dt}{B}$, откуда $\ln|x|=\dfrac{A}{B}t+\ln\left|\tilde{\tilde{C}}\right|$, т.е. $x=\tilde{\tilde{C}}e^{\frac{A}{B}t}$. Из начальных условий

$x(0)=D$ найдём $\tilde{\tilde{C}}=D$, т.е. $x(t)=De^{\frac{A}{B}t}$.

**Задача № 2.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n+n^2+...+n^{2022})}{n^2}.$$

**Решение.** Оценим $n$-ый член ряда ($n\geq 1$)

$$\frac{\ln(1+n+n^2+...+n^{2022})}{n^2}\leq\frac{\ln(n^{2022}+n^{2022}+...+n^{2022})}{n^2}\leq\frac{\ln(2023n^{2022})}{n^2}\leq\frac{\ln 2023+2022\ln n}{n^2}.$$

Найдём

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln 2023+2022\ln x}{x^2}:\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln 2023+2022\ln x}{\sqrt{x}}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2022/x}{1/2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4044}{\sqrt{x}}=0.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится как обобщенный гармонический ряд, следовательно, сходится ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln 2023+2022\ln n}{n^2}$ по признаку сравнения, а, значит, сходится и исходный ряд по первому признаку сравнения.

**Задача № 3.** Найти вероятность того, что при произвольном разделении 2 белых, 2 чёрных и 2 жёлтых шаров на 3 группы по 2 шара в каждой группе будут шары разных цветов.

**Решение.** Найдём количество способов разбить 6 шаров на три группы. В первую группу шары можно выбрать $C_6^2$ способами, во вторую $C_4^2$. Количество перестановок множества из 3 элементов равно $3!=6$, поэтому количество способов разделить шары на три группы равно $\dfrac{C_6^2C_4^2}{3!}=\dfrac{15\cdot 6}{6}=15$.

Найдём количество разбиений, благоприятствующих появлению события. Пару в первую группу можно выбрать $C_6^2-3$ способами (есть только три пары шаров одного цвета). Во вторую группу шары можно выбрать $C_4^2-2$ способами, так как нельзя выбирать ни шары одного цвета, ни два остальных. Всего способов $\dfrac{(C_6^2-3)(C_4^2-2)}{3!}=\dfrac{12\cdot 4}{6}=8$. Следовательно, вероятность равна $\dfrac{8}{15}$.

**Задача № 4.** Дана функция $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Найти $g'(2022)$, где $g(x)=\underbrace{f(f(f(...f(x))))}_{2022}$.

**Решение.** Пусть $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, $x\neq 1$. Тогда $f(f(x))=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-(f(x))^3}}=\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}$.

$f(f(f(x)))=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-f(f(x))^3}}=x$, $f(f(f(f(x))))=f(x)$. Таким образом,

$\underbrace{f(f(f(...f(x))))}_{2022}=f(f(f(x)))=x$, так как $2022=674\cdot 3$. Тогда $g'(2022)=1$.

**Задача № 5.** Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и принимает значения из этого же отрезка. Доказать, что существует точка $c\in[0,1]$, такая что $f(c)=c$.

**Решение.** Рассмотрим функцию $\varphi(x)=f(x)-x$, которая непрерывна на отрезке $[0,1]$ как разность двух непрерывных функций. Так как для всех $x_0\in[0,1]$, то $f(x_0)\in[0,1]$. Кроме того,

$\varphi(0)=f(0)\geq 0$,

$\varphi(1)=f(1)-1\leq 0$.

Если $\varphi(0)=0$ или $\varphi(1)=0$ то утверждение очевидно, в противном случае воспользуемся теоремой о промежуточном значении, согласно которой, существует такое значение $c\in[0,1]$, что $\varphi(c)=0$, т.е. $\varphi(c)=f(c)-c=0$ и $f(c)=c$, что и требовалось доказать.

**Задача № 6.** Вычислить

$$\iint\limits_D \frac{xdxdy}{(1+xy)(1+x^2)},$$

где $D=\{(x,y):0\leq x,y\leq 1\}$.

**Решение.** Область *D* представляет собой квадрат, а подынтегральная функция непрерывна в области *D*. Следовательно, функция интегрируема и соответствующие повторные интегралы равны по теореме Фубини.

В силу симметрии области *D* имеем

$$I=\iint\limits_D \frac{xdxdy}{(1+xy)(1+x^2)}=\iint\limits_D \frac{ydxdy}{(1+yx)(1+y^2)}=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(\frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}+\frac{y}{(1+yx)(1+y^2)}\right)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_D \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy+\iint\limits_D \frac{y}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy\right]=$$

$$=\iint\limits_D \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy=\int_0^1\frac{xdx}{1+x^2}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$