Национальный исследовательский Томский государственный университет

Областная олимпиада по математике (предмет)
16 мая 2021 года

Старшие курсы

Задача 1. Докажите, что для любого натурального n существует такой многочлен с целыми коэффициентами $f_n(x)$, что $\cos n = f_n(\cos 1)$.

Задача 2. Найдите $\int \frac{(x+2)dx}{(x+1)^4+(x+3)^4}$.

Задача 3. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — четные целые числа, отличные от нуля. Докажите, что первая строка матрицы A не содержит нулевых элементов.

Задача 4. Вычислить интеграл $\iint\limits_D y\,dx\,dy$, где D ограничена кривыми $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{1}{x^3} + x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$.

Задача 5. Решите дифференциальное уравнение $y' = -2\left(\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{1+x^4y^2}}{x^3}\right)$.

Задача 6. На координатной плоскости случайно выбирается одно из множеств A_n, где $A_1 = [-1;1]\times[-1;1] = [-1;1]^2$, $A_{n+1} = [-n-1;n+1]^2 \setminus [-n;n]^2$, $n \in \mathbb{N}$. Вероятность того, что выбрано множество A_n, равна $\frac{1}{2^n}$. Затем случайным образом выбирается точка из множества A_n, причем положение точки внутри A_n равновероятно. Вычислите вероятность того, что выбранная точка попадет в полосу $D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : |\,y\,| \le 1\right\}$.

Решения.

Задача 1. Докажите, что для любого натурального n существует такой многочлен с целыми коэффициентами $f_n(x)$, что $\cos n = f_n(\cos 1)$.

Решение. _Первый способ._ Так как $\cos 2 = 2\cos^2 1 - 1$, то при $n = 1$ и $n = 2$ условию задачи удовлетворяют многочлены $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = 2x^2 - 1$. Далее применим метод математической индукции. Пусть $f_n(x)$ и $f_{n+1}(x)$ – многочлены с целыми коэффициентами такие, что $\cos n = f_n(\cos 1)$ и $\cos(n+1) = f_{n+1}(\cos 1)$. По формуле преобразования суммы в произведение имеем $\cos(n+2) + \cos n = 2\cos(n+1)\cos 1$. Тогда

$$\cos(n+2) = 2\cos(n+1)\cos 1 - \cos n = 2 f_{n+1}(\cos 1)\cos 1 - f_n(\cos 1).$$

Значит, $f_{n+2}(x) = 2x f_{n+1}(x) - f_n(x)$ – искомый многочлен с целыми коэффициентами.

Второй способ. Докажем сначала утверждение для нечетных n. Для $n = 1$ утверждение задачи очевидно. Пусть $n = 2m + 1$ – нечетное натуральное число, отличное от единицы. Сгруппировав попарно слагаемые с равными биномиальными коэффициентами в формуле бинома Ньютона, получим $\left(e^i + e^{-i}\right)^n = \sum_{k=0}^{m} C_n^k \left(e^{i(n-2k)} + e^{-i(n-2k)}\right)$. Значит,

$2^{n-1}\cos^n 1 = \sum_{k=0}^{m} C_n^k \cos(n-2k) = \cos n + \sum_{k=1}^{m} C_n^k \cos(n-2k)$ и $\cos n = 2^{n-1}\cos^n 1 - \sum_{k=1}^{m} C_n^k \cos(n-2k)$.

Осталось применить метод математической индукции, и тогда из предположения, что для всех нечетных натуральных чисел, меньших n, существует искомый многочлен с целыми коэффициентами, следует, что такой многочлен существует и для n.

Пусть теперь $n = 2m$ – четное натуральное число. Аналогично, по формуле бинома Ньютона, получим $\left(e^i + e^{-i}\right)^n = \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \left(e^{i(n-2k)} + e^{-i(n-2k)}\right) + C_n^m$, $2^{n-1}\cos^n 1 = \cos n + \sum_{k=1}^{m-1} C_n^k \cos(n-2k) + \frac{1}{2}C_n^m$ и $\cos n = 2^{n-1}\cos^n 1 - \sum_{k=1}^{m} C_n^k \cos(n-2k) - \frac{1}{2}C_n^m$. Заметим, что $C_n^m = C_{2m}^m = C_{2m-1}^m + C_{2m-1}^{m-1} = 2C_{2m-1}^m$, так как $C_{2m-1}^m = C_{2m-1}^{m-1}$, а значит, число $\frac{1}{2}C_n^m$ является целым. Осталось применить метод математической индукции, и тогда из предположения, что для всех четных натуральных чисел, меньших n, существует искомый многочлен с целыми коэффициентами, следует, что такой многочлен существует и для n.

Задача 2. Найдите $\int \frac{(x+2)dx}{(x+1)^4 + (x+3)^4}$.

Ответ: $\frac{1}{16\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^2+4x+7-2\sqrt{2}}{x^2+4x+7+2\sqrt{2}}\right| + C$.

Решение. Сделаем в интеграле замену $t = x + 2$ и применим формулу бинома Ньютона $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Тогда

$$\int \frac{(x+2)dx}{(x+1)^4 + (x+3)^4} = \int \frac{tdt}{(t-1)^4 + (t+1)^4} = \int \frac{tdt}{2t^4 + 12t^2 + 2} = \frac{1}{2}\int \frac{tdt}{(t^2+3)^2 - 8} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d(t^2+3)}{(t^2+3)^2 - 8} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t^2+3-2\sqrt{2}}{t^2+3+2\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{16\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^2+4x+7-2\sqrt{2}}{x^2+4x+7+2\sqrt{2}}\right| + C.$$

Задача 3. Пусть $A=\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — четные целые числа, отличные от нуля. Докажите, что первая строка матрицы A не содержит нулевых элементов.

Решение. При $n = 1$ утверждение очевидно.

Пусть $n \ge 2$. Обозначим через $(y_k \quad z_k)$ первую строку матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где k – натуральное число и $1 \le k \le n$. Тогда $y_1 = a_1$, $z_1 = 1$, и из определения произведения матриц следует, что $y_{k+1} = y_k a_{k+1} + z_k$ и $z_{k+1} = y_k$. Значит, $z_{k+1} = y_k = y_{k-1}a_k + z_{k-1} = z_k a_k + z_{k-1}$.

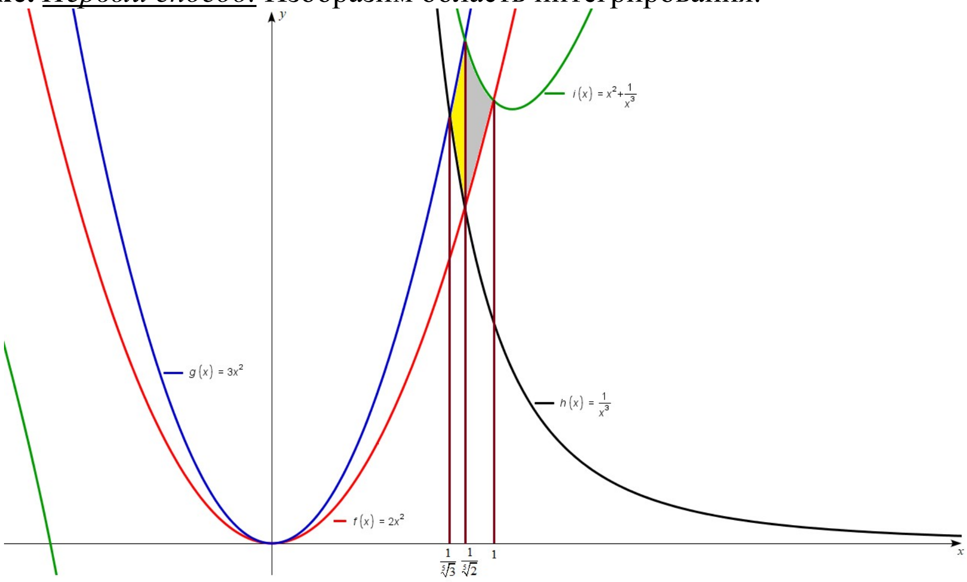
Заметим, что числа $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ по модулю не меньше 2, и докажем методом математической индукции, что $|z_{k+1}| \ge |z_k|$. При $k = 1$ имеем $|z_2| = |y_1| = |a_1| > 1 = |z_1|$. Допустим теперь, что при некотором натуральном k, где $2 \le k \le n-1$, выполняется неравенство $|z_k| \ge |z_{k-1}|$. Тогда $|z_{k+1}| + |z_{k-1}| = |z_k a_k + z_{k-1}| + |-z_{k-1}| \ge |z_k a_k| \ge 2|z_k| \ge |z_k| + |z_{k-1}|$, откуда $|z_{k+1}| \ge |z_k|$. Индукция закончена.

Из доказанного следует, что $0 < 1 = |z_1| \le |z_2| \le \ldots \le |z_n|$ и $0 < a_1 = |y_1| \le |y_2| \le \ldots \le |y_n|$, а значит, $y_n \ne 0$ и $z_n \ne 0$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\iint\limits_D y\,dx\,dy$, где D ограничена кривыми $y = \dfrac{1}{x^3}$, $y = \dfrac{1}{x^3} + x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$.

Ответ: $\dfrac{1}{5}\ln 2$.

Решение. *Первый способ.* Изобразим область интегрирования.



Найдем абсциссы точек пересечения кривых: а) $y = 2x^2$ и $y = \dfrac{1}{x^3}$ пересекаются при $x = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$; б) $y = 3x^2$ и $y = \dfrac{1}{x^3}$ — при $x = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$; в) $y = 2x^2$ и $y = x^2 + \dfrac{1}{x^3}$ — при $x = 1$. Тогда

$$\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[5]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[5]{2}}}dx\int\limits_{\frac{1}{x^3}}^{3x^2}ydy+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[5]{2}}}^{1}dx\int\limits_{2x^2}^{x^2+\frac{1}{x^3}}ydy=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[5]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[5]{2}}}\left(9x^4-\frac{1}{x^6}\right)dx+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[5]{2}}}^{1}\left(x^4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^6}-4x^4\right)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{9x^5}{5}+\frac{x^{-5}}{5}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt[5]{3}}}^{\frac{1}{\sqrt[5]{2}}}+\frac{1}{2}\left(\frac{5\cdot 2\ln x}{5}-\frac{x^{-5}}{5}-\frac{3x^5}{5}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt[5]{2}}}^{1}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{9}{2}+2-\frac{9}{3}-3+10\ln 1-1-3-10\ln\frac{1}{\sqrt[5]{2}}+2+\frac{3}{2}\right)=\frac{\ln 2}{5}.$$

<u>*Второй способ.*</u> Сделаем замену $\xi=yx^3$, $\eta=\dfrac{y}{x^2}$. Так как $\dfrac{\partial\xi}{\partial x}=3yx^2$, $\dfrac{\partial\xi}{\partial y}=x^3$, $\dfrac{\partial\eta}{\partial x}=-\dfrac{2y}{x^3}$, $\dfrac{\partial\eta}{\partial y}=\dfrac{1}{x^2}$, то якобиан перехода при таком отображении равен $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix}3yx^2 & x^3\\ -2\dfrac{y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2}\end{vmatrix}=3y+2y=5y$. Якобиан обратного отображения будет равен $\Delta(\xi,\eta)=\dfrac{1}{\Delta(x,y)}$. Значит, подынтегральное выражение после перехода к переменным (ξ,η) равно $y\cdot\Delta(\xi,\eta)d\xi d\eta=y\cdot\dfrac{1}{5y}d\xi d\eta=\dfrac{1}{5}d\xi d\eta$.

Область интегрирования D перейдет во множество, ограниченное кривыми $\eta=2$, $\eta=3$, $\xi=1$ и $\xi=1+\dfrac{1}{\eta-1}$.

Имеем $\displaystyle\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_2^3 d\eta\int\limits_1^{1+\frac{1}{\eta-1}}\frac{1}{5}d\xi=\frac{1}{5}\int\limits_2^3\frac{1}{\eta-1}d\eta=\frac{1}{5}\ln 2$.

Задача 5. Решите дифференциальное уравнение $y'=-2\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{\sqrt{1+x^4y^2}}{x^3}\right)$.

Ответ: $x^2\left(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2}\right)=C$

Решение. Умножим обе части уравнения на x^3 и приведём к дифференциальной форме: $2\left(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2}\right)dx+x^3dy=0$. Далее сделаем замену $z=x^2y$, $y=\dfrac{z}{x^2}$, $dy=\dfrac{x^2dz-2xzdx}{x^4}$. Тогда дифференциальное уравнение примет вид: $xdz-2zdx=-2\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)dx$, или после упрощения, $xdz=-2\sqrt{1+z^2}dx$ – уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его, получим: $\dfrac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=-2\dfrac{dx}{x}$ $\Rightarrow$ $\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=-2\ln|x|+\ln C$ $\Rightarrow$ $z+\sqrt{1+z^2}=\dfrac{C}{x^2}$.

В результате, получим общий интеграл исходного уравнения: $x^2\left(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2}\right)=C$.

Задача 6. На координатной плоскости случайно выбирается одно из множеств A_n, где $A_1=[-1;1]\times[-1;1]=[-1;1]^2$, $A_{n+1}=[-n-1;n+1]^2\setminus[-n;n]^2$, $n\in\mathbb{N}$. Вероятность того, что выбрано множество A_n, равна $\frac{1}{2^n}$. Затем случайным образом выбирается точка из множества A_n, причем положение точки внутри A_n равновероятно. Вычислите вероятность того, что выбранная точка попадет в полосу $D=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2:|y|\le 1\right\}$.

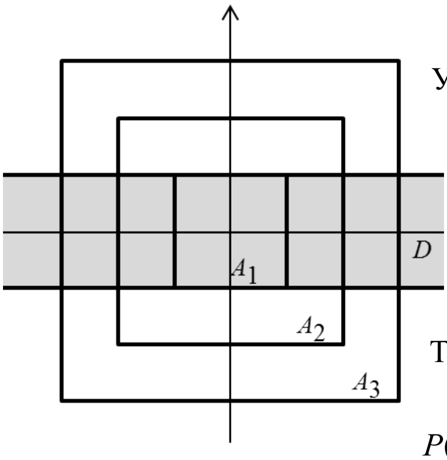
Ответ: $\frac{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}}$.

Решение. Точка попадет в полосу D тогда и только тогда, когда она попадет в одно из множеств $D\cap A_n$, $n\in\mathbb{N}$. Эти множества не пересекаются. Найдем вероятности попадания точки в каждое из множеств $D\cap A_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Так как $D\cap A_1=A_1$, то $P(x\in D\cap A_1)=P(x\in A_1)=\frac{1}{2}$.

По формуле вероятности произведения событий имеем:

$$P(x\in D\cap A_{n+1})=P(x\in D\big|_{A_{n+1}})\cdot P(x\in A_{n+1}).$$



Условную вероятность $P(x\in D\big|_{A_{n+1}})$ можно найти как отношение площадей $D\cap A_{n+1}$ и A_{n+1} (см. рис.), так как внутри множества A_{n+1} положение точки равновероятно:

$$P(x\in D\big|_{A_{n+1}})=\frac{S(D\cap A_{n+1})}{S(A_{n+1})}=\frac{4}{4(n+1)^2-4n^2}=\frac{1}{2n+1}.$$

Таким образом, $P(x\in D\cap A_{n+1})=\frac{1}{2^{n+1}(2n+1)}$, и значит,

$$P(x\in D\cap A_n)=\frac{1}{2^n(2n-1)}.$$

Искомая вероятность $P(x\in D)=\sum_{n=1}^{\infty}P(x\in D\cap A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n-1)}$.

Полученный ряд сходится по первому признаку сравнения, так как $\frac{1}{2^n(2n-1)}\le\frac{1}{2^n}$.

Для нахождения суммы ряда заметим, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n-1}=t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}$, $t=\sqrt{x}$. Исследуемый нами числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n-1)}$ получается из функционального ряда $t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}$ при $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}$ сходится при $t\in(-1;1)$.

По теореме о почленном интегрировании степенного ряда в интервале сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t s^{2n-2}ds=\int_0^t\left(\sum_{n=1}^{\infty}s^{2n-2}\right)ds=\text{(сумма геометрической прогрессии)}$$

$$=\int_0^t\frac{ds}{1-s^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right|\Bigg|_0^t=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n-1)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}}.$$