Национальный исследовательский Томский государственный университет

Областная олимпиада по математике (предмет)
16 мая 2021 года

Первый курс

Задача 1. Решите уравнение $(x+1)^4+(x+3)^4=14$ в действительных числах.

Задача 2. Профессор выписал на доске 100 функций: $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, …, $f_{100}(x)=x^{100}$, и предложил студентам записать в тетради те попарные суммы этих функций, которые являются монотонными на всей числовой прямой (например, $f_1(x)+f_1(x)$, $f_3(x)+f_5(x)$ и т.д.). Какое наибольшее количество различных функций могут записать в тетрадях студенты?

Задача 3. Пусть $A=\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — четные целые числа, отличные от нуля. Докажите, что сумма элементов первой строки матрицы A является нечетной.

Задача 4. Известно, что в числовой сходящейся последовательности произведение любых двух соседних членов равно двум или трем. Найдите предел этой последовательности.

Задача 5. Заданы три прямые и плоскость. Оказалось, что существует такой угол α, что для любых двух из трех заданных прямых угол между этими прямыми равен α. Более того, угол между любой из заданных прямых и заданной плоскостью тоже равен α. Найдите α.

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при которых функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^5+x^3+ax$ является биекцией.

Решения.

Задача 1. Решите уравнение $(x+1)^4+(x+3)^4=14$ в действительных числах.

Ответ: $x=\pm\sqrt{\sqrt{15}-3}-2$.

Решение. После замены $t=x+2$ уравнение приобретет вид $(t-1)^4+(t+1)^4=14$. Раскроем скобки с помощью формулы бинома Ньютона $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, приведем подобные и сократим на два: $t^4+6t^2-6=0$. Это биквадратное уравнение имеет два корня: $t_{1,2}=\pm\sqrt{\sqrt{15}-3}$. Значит, исходное уравнение также имеет два корня $x_{1,2}=\pm\sqrt{\sqrt{15}-3}-2$.

Задача 2. Профессор выписал на доске 100 функций: $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, …, $f_{100}(x)=x^{100}$, и предложил студентам записать в тетради те попарные суммы этих функций, которые являются монотонными на всей числовой прямой (например, $f_1(x)+f_1(x)$, $f_3(x)+f_5(x)$ и т.д.). Какое наибольшее количество различных функций могут записать в тетрадях студенты?

Ответ: 1275.

Решение. Если k и l – нечетные числа, то функция вида $f_k(x)+f_l(x)=x^k+x^l$ является монотонной на все числовой прямой как сумма двух возрастающих функций. Если же k и l – четные числа, то функция вида $f_k(x)+f_l(x)=x^k+x^l$ убывает на промежутке $(-\infty;0]$ и возрастает на промежутке $[0;+\infty)$, а значит, не является монотонной на всей прямой. Пусть теперь одно из чисел k или l нечетно, а другое четно. Тогда для функции $g(x)=f_k(x)+f_l(x)=x^k+x^l$ выполняется равенство $g(0)=g(-1)=0$, а значит, она не является монотонной.

Итак, функция $f_k(x)+f_l(x)$ будет монотонной только в том случае, когда k и l – нечетные числа. Среди целых чисел от 1 до 100 содержится ровно 50 нечетных чисел. Значит, найдутся 50 функций с равными слагаемыми ($f_1(x)+f_1(x)$, $f_3(x)+f_3(x)$, …, $f_{99}(x)+f_{99}(x)$), и $C_{50}^2=\frac{50\cdot 49}{2}=1225$ функций с разными слагаемыми. Таким образом, наибольшее количество искомых функций равно 1275.

Замечание 1. Немонотонность функции $g(x)$ можно было доказать и с помощью достаточного условия экстремума. Не нарушая общности, можно считать, что $k<l$. Покажем, что $x_0=\sqrt[l-k]{-\frac{k}{l}}$ – экстремум функции $g(x)$. Действительно, $g'(x)=kx^{k-1}+lx^{l-1}=x^{k-1}\left(k+lx^{l-k}\right)$, $g'(x_0)=0$, $g''(x)=k(k-1)x^{k-2}+l(l-1)x^{l-2}=x^{k-2}\left(k(k-1)+l(l-1)x^{l-k}\right)$, $g''(x_0)=k(k-l)x_0^{k-2}\neq 0$. Следовательно, в окрестности точки x_0 функция не является монотонной.

Замечание 2. Количество функций можно вычислить как количество сочетаний с повторениями $\overline{C}_{50}^2=C_{51}^2=\frac{51\cdot 50}{2}=1275$

Задача 3. Пусть $A=\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ — четные целые числа, отличные от нуля. Докажите, что сумма элементов первой строки матрицы A является нечетной.

Решение. Обозначим через $(y_k \quad z_k)$ первую строку матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где k – натуральное число и $1 \le k \le n$. Тогда из определения произведения матриц следует, что $y_{k+1} = y_k a_{k+1} + z_k$ и $z_{k+1} = y_k$. Сложив эти равенства, получим $y_{k+1} + z_{k+1} = y_k a_{k+1} + z_k + y_k$. Так как $y_k a_{k+1}$ – четное число, то четность чисел $y_k + z_k$ и $y_{k+1} + z_{k+1}$ одинакова. Осталось заметить, что $y_1 + z_1 = a_1 + 1$ нечетное.

Критерии.

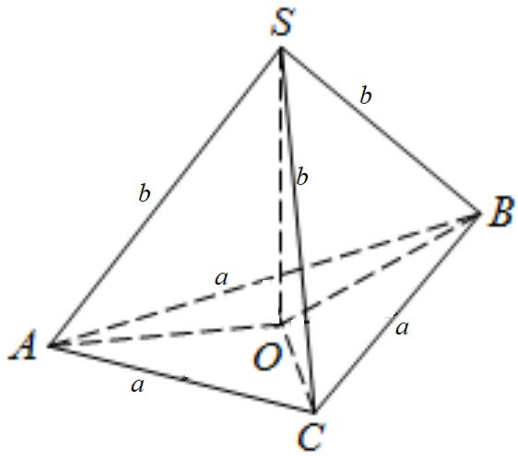
Задача 4. Известно, что в числовой сходящейся последовательности произведение любых двух соседних членов равно двум или трем. Найдите предел этой последовательности.

Ответ: $-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{3}$.

Решение. Пусть $\{a_n\}$ – искомая последовательность, и $a = \lim\limits_{x\to\infty} a_n$. Пусть $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$. Тогда последовательность $\{b_n\}$ сходящаяся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a^2$. С другой стороны, членами последовательности $\{b_n\}$ могут быть только числа 2 или 3, и значит, $\{b_n\}$ сходится либо к двум либо к трем. Таким образом, $a = \pm\sqrt{2}$ или $a = \pm\sqrt{3}$. Примеры постоянных последовательностей с общими членами $-\sqrt{3}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{3}$ соответственно показывают, что все четыре ответа возможны.

Задача 5. Заданы три прямые и плоскость. Оказалось, что существует такой угол α, что для любых двух из трех заданных прямых угол между этими прямыми равен α. Более того, угол между любой из заданных прямых и заданной плоскостью тоже равен α. Найдите α.

Ответ: $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}$



Решение. Так как при параллельном переносе угол не меняется, то можно считать, что все заданные прямые проходят через точку *S*, не лежащую в заданной плоскости. Предположение, что угол α прямой, приводит к противоречию с единственностью перпендикуляра к плоскости, проведенного из точки *S*. Значит, α – острый. Равные острые углы между каждой парой прямых исключают плоский вариант расположения прямых. Таким образом, заданные прямые пересекают заданную плоскость в трех различных точках *A*, *B*, *C*, не лежащих на одной прямой.

Рассмотрим случай, когда углы между данными прямыми совпадают с углами *ASB*, *ASC* и *BSC* (т.е. углы *ASB*, *ASC* и *BSC* являются острыми).

Проведем перпендикуляр *SO* на плоскость (*ABC*). Получим $\Delta SAO = \Delta SBO = \Delta SCO$ (так как *SO* – общая сторона, $\angle SOA = \angle SOB = \angle SOC = 90°$, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \alpha$), и $\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCA$ (так как $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = \alpha$, $SA = SB = SC$).

Обозначим $AB = BC = AC = a$, $AS = BS = CS = b$. Из теоремы косинусов для ΔSAB следует, что $AB = a = b\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$. Так как точка O является центром равностороннего треугольника ABC, то $AO = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = b\sqrt{\dfrac{2(1-\cos\alpha)}{3}}$. Из треугольника ASO видно, что $\cos\alpha = \dfrac{AO}{AS} = \sqrt{\dfrac{2(1-\cos\alpha)}{3}}$. Преобразовав это равенство и сделав замену $t = \cos\alpha$, придем к уравнению $3t^2 + 2t - 2 = 0$, из которого $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$. Так как $\cos\alpha > 0$, то $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}$.

Покажем, что случай, когда какой-либо из углов ASB, ASC или BSC является тупым, невозможен. Предположим, что угол ASB является смежным к углу между прямыми AS и BS. Тогда $\angle ASC = 180° - \alpha$ и $AB = b\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = 2b\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Но при этом $AB \le AO + OB = 2b\cos\alpha$. Получаем, что $2b\cos\dfrac{\alpha}{2} \le 2b\cos\alpha$, а это противоречит убыванию функции $y = \cos x$ при x, лежащих в первой четверти.

Замечание. Если угол между параллельными прямыми и угол между плоскостью и параллельной ей прямой считать нулевыми, то условию задачи еще удовлетворяет $\alpha = 0$. Добавление или, наоборот, потеря этого случая никак не влияет на оценивание задачи.

Задача 6. Найдите все значения параметра a, при которых функция $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + x^3 + ax$ является биекцией.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right] \cup [0; +\infty)$

Решение. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то ее инъективность равносильна строгой монотонности. Заметим, что при $a = 0$ функция $f(x) = x^3$ является строго возрастающей. При $a \ne 0$ исследуем функцию на монотонность с помощью производной $f'(x) = 5ax^4 + 3x^2 + a$. Найдем нули производной. Замена $t = x^2 \ge 0$ приводит к квадратному уравнению $5at^2 + 3t + a = 0$. Если дискриминант $D = 9 - 20a^2$ неположителен, то квадратичная функция $g(t) = 5at^2 + 3t + a$ неотрицательна при $a > 0$ и неположительна при $a < 0$ на всей числовой оси. Следовательно, при $a \in \left(-\infty; -\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right] \cup \left[\dfrac{3\sqrt{5}}{10}; +\infty\right)$ функция $f(x)$ будет строго монотонной. Если же дискриминант положителен, т.е. $a \in \left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{10}; \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$, то уравнение будет иметь два различных корня, причем из теоремы Виета, записанной для соответствующего приведенного уравнения $t^2 + \dfrac{3}{5a}t + \dfrac{1}{5} = 0$, видно, что при $a > 0$ оба корня отрицательны, а при $a < 0$ оба корня положительны. Таким образом, в области $t \ge 0$ функция $g(t)$ знакопостоянна также при $a \in \left(0; \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$. Окончательно получаем, что функция $f(x)$ является инъекцией при $a \in \left(-\infty; -\dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right] \cup [0; +\infty)$.

Исследуем теперь $f(x)$ на сюръективность. Для этого вычислим пределы функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$. Если $a = 0$, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$; если $a > 0$, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^5 + x^3 + ax = \lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^5\left(1+\frac{1}{ax^2}+\frac{1}{x^4}\right) = \pm\infty$; если же $a < 0$, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^5 + x^3 + ax = \lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^5\left(1+\frac{1}{ax^2}+\frac{1}{x^4}\right) = \mp\infty$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то по теореме о промежуточном значении получаем, что $f(x)$ является сюръекцией для любого a. Следовательно, $f(x)$ является биекцией при $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{5}}{10}\right] \cup [0; +\infty)$.