Томский государственный архитектурно - строительный университет
Областной тур Всероссийской олимпиады по математике
15 апреля 2018 года, 2 курс

Задача № 1

Дана функция $f(x) = (2x - x^2)^{-1}$. Вычислите значение производной этой функции 2018-го порядка в точке $x = 1$.

Решение. Функция может быть представлена в виде суммы геометрической прогрессии и разложена в ряд Тейлора по степеням $x - 1$ следующим образом:

$f(x) = \frac{1}{1-(x-1)^2} = 1 + (x-1)^2 + (x-1)^4 + \cdots + (x-1)^{2018} + \cdots$.

Этот степенной ряд можно дифференцировать почленно в круге сходимости с центром в точке с координатами (1, 0) и радиусом 1.

$$f^{(2k-1)}(x) = (2k)!\,(x-1) + \cdots$$

$$f^{(2k)}(x) = (2k)! + \frac{1}{2}(2k+2)!\,(x-1)^2 + \cdots$$

Очевидно, что производные нечётного порядка не содержат постоянных слагаемых и поэтому равны 0 в точке $x = 1$. Производные чётного порядка в точке $x = 1$ равны $(2k)!$.

$$f^{(2018)}(1) = 2018!$$

Задача № 2

Вычислите интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$

Решение.

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{e^{-x}dx}{(e^{-x}+1)(x^2+1)} = |y = -x| = \int_{1}^{-1} \frac{-e^y dy}{(e^y+1)(y^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{e^y dy}{(e^y+1)(y^2+1)} =$
$\int_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{(e^x+1)(x^2+1)} = I$. Складывая первый и последний интегралы, получаем
$2I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} + \int_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{(e^x+1)(x^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{(e^x+1)dx}{(e^x+1)(x^2+1)} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$.
Поэтому $I = \frac{\pi}{4}$.

Задача № 3

Пусть $C(a)$ – коэффициент при x^{2018} в разложении функции $(1+x)^a$.

Вычислите интеграл $\int_0^1 C(-t-1)\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}+\cdots+\frac{1}{t+2018}\right)dt$

Решение. Производная 2018-го прядка функции $(1+x)^a$ равна

$a(a-1)...(a-2017)(1+x)^{a-2018}$, поэтому $C(a)=\frac{a(a-1)...(a-2017)}{2018!}$.

$$\int_0^1 C(-t-1)\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}+\cdots+\frac{1}{t+2018}\right)dt=$$

$$=\int_0^1 \frac{(-t-1)(-t-2)\ldots(-t-2018)}{2018!}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}+\cdots+\frac{1}{t+2018}\right)dt=$$

Раскроем скобки и воспользуемся правилом дифференцирования произведения для 2018 множителей

$$=\frac{(-1)^{2018}}{2018!}\int_0^1 \sum_{k=1}^{2018}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{2018}(t+i)\,dt=\frac{1}{2018!}\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\prod_{i=1}^{2018}(t+i)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2018!}\prod_{i=1}^{2018}(t+i)\Bigg|_0^1=\frac{(1+1)(1+2)(1+3)\ldots(1+2018)-2018!}{2018!}=2018.$$

Задача № 4

Найдите непрерывную функцию $f(x)$, удовлетворяющую условию

$$\iint\limits_D xf\left(\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy = \frac{a^2}{3}\left(f\left(\frac{a}{2}\right) - e^{-a/2}\right)$$

Левая часть равенства есть двойной интеграл по области D – множеству точек плоскости удовлетворяющих неравенствам $x^2 + y^2 \le a^2$, $|y| \le x/\sqrt{3}$, $x > 0$.

Решение. Перейдём к полярным координатам

$$\iint_D xf\left(\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int_0^a \rho^2 \cdot cos\varphi \cdot f(a\, sin\varphi)d\rho = \frac{a^3}{3}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} f(a\, sin\varphi)\, cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{-a^2}{3}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} f(a\, sin\varphi)\; d(a\, cos\varphi) = \frac{a^2}{3}F(a\, sin\varphi)\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{a^2}{3}\left(F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(-\frac{a}{2}\right)\right).$$

Здесь $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

Исходя из условия, получаем $F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(-\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) - e^{-a/2}$. Нетрудно убедиться, что непрерывная функция $f(x) = e^x$ удовлетворяет этому условию.

Задача № 5

Найдите явное выражение для суммы степенного ряда

$$3+\frac{3x^3}{3!}+\frac{3x^6}{6!}+\frac{3x^9}{9!}+\cdots+\frac{3x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$$

Решение. Используя признак Даламбера, легко доказать, что степенной ряд сходится на всей числовой прямой (абсолютно и равномерно), поэтому его можно дифференцировать почленно. Дифференцируя трижды, имеем

$$S'(x)=\frac{3x^2}{2!}+\frac{3x^5}{5!}+\frac{3x^8}{8!}+\cdots+\frac{3x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots$$

$$S''(x)=\frac{3x^1}{1!}+\frac{3x^4}{4!}+\frac{3x^7}{7!}+\cdots+\frac{3x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots$$

$$S'''(x)=3+\frac{3x^3}{3!}+\frac{3x^6}{6!}+\cdots=S(x).$$

Решим задачу Коши: $S'''(x)=S(x)$, $S(0)=3$, $S'^{(0)}=0$, $S''^{(0)}=0$.

Характеристическое уравнение $k^3-1=0$ имеет корни $k_1=1$, $k_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Общее решение имеет вид $S(x)=C_1e^x+e^{-x/2}\left(C_2cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_3sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

Находим производные

$$S'(x)=C_1e^x+e^{-x/2}\left(\left(C_3\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}C_2\right)cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+\left(-C_2\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}C_3\right)sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$S''(x)=C_1e^x+e^{-x/2}\left(\left(-C_3\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}C_2\right)cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+\left(C_2\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}C_3\right)sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

Учитывая начальные условия, получаем СЛАУ

$$\begin{cases} C_1+C_2=3 \\ C_1+C_3\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}C_2=0 \\ C_1-C_3\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}C_2=0 \end{cases} \quad \text{с решением} \quad \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=2 \\ C_3=0 \end{cases}$$

Окончательно получаем $S(x)=e^x+2e^{-x/2}cos\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Задача № 6

Найдите функции $x(t)$ и $y(t)$, удовлетворяющие системе ОДУ

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{(y')^2}{y} = x' + \dfrac{xy'}{y} \\ yx' + xy' = 1 \end{cases}$$

Решение. Левую часть первого уравнения можно представить в виде

$$y'' + \frac{(y')^2}{y} = \frac{y''y + (y')^2}{y} = \frac{(y'y)'}{y}$$

Правую часть первого уравнения можно представить в виде

$$x' + \frac{xy'}{y} = \frac{x'y + xy'}{y} = \frac{(xy)'}{y}$$

Поэтому система принимает вид

$$\begin{cases} (y'y)' = (xy)' \\ (xy)' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (y'y)' = 1 \\ (xy)' = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y'y = t + C_1 \\ xy = t + C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = (t + C_1)^2 + C \\ xy = t + C_2 \end{cases}$$

Окончательно, получаем

$$\begin{cases} y(t) = \pm\sqrt{(t + C_1)^2 + C} \\ x(t) = \dfrac{t + C_2}{\pm\sqrt{(t + C_1)^2 + C}} \end{cases}$$