Томский государственный архитектурно - строительный университет
Областной тур Всероссийской олимпиады по математике
15 апреля 2018 года, 1 курс

Задача № 1

Рассматриваются всевозможные отрезки длины 10, один конец которых принадлежит прямой $3x - 4y = 0$, а другой конец принадлежит прямой $3x + 4y = 0$. Какую линию образуют середины всех таких отрезков?

Решение. Так как $x=4t$, $y=3t$ – параметрические уравнения прямой $3x - 4y = 0$, то расстояние от точки $M(4t, 3t)$ до точки $N(x, y)$, находящейся прямой $3x + 4y = 0$, по условию равно 10. Следовательно, $(x-4t)^2+(y-3t)^2=100$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases}(x-4t)^2+(y-3t)^2=100\\ 3x+4y=0\end{cases}$$

относительно x и y, получаем параметрические уравнения прямой $3x + 4y = 0$ в виде

$$\begin{cases}x=\dfrac{28t\mp 8\sqrt{625-144t^2}}{25}\\ y=\dfrac{-21t\pm 6\sqrt{625-144t^2}}{25}\end{cases}$$

Параметрические уравнения середин отрезков MN, с учётом зависимости $M(4t, 3t)$ и $N\left(\frac{28t\mp 8\sqrt{625-144t^2}}{25}, \frac{-21t\pm 6\sqrt{625-144t^2}}{25}\right)$ координат точек от параметра t, принимают вид

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{28t\mp 8\sqrt{625-144t^2}}{25}+4t\right)=\dfrac{128t\mp 8\sqrt{625-144t^2}}{50}=\dfrac{64t\mp 4\sqrt{625-144t^2}}{25}\\ y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-21t\pm 6\sqrt{625-144t^2}}{25}+3t\right)=\dfrac{54t\pm 6\sqrt{625-144t^2}}{50}=\dfrac{27t\pm 3\sqrt{625-144t^2}}{25}\end{cases}$$

Исключая параметр t, с получаем общее уравнение линии $(3x/20)^2+(4y/15)^2=1$, т. е. уравнение эллипса.

Задача № 2

Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 32\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. При каком натуральном значении степени n сумма всех элементов первой строки матрицы A^n будет максимальной?

Решение. Докажем равенство $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n & 2n(17-n)\\ 0 & 1 & -2n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ методом математической индукции. Для n=1 равенство $A^1=A$ верно. Для n+1 имеем

$$A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 2n & 2n(17-n)\\ 0 & 1 & -2n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 32\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2(n+1) & 2(n+1)(17-(n+1))\\ 0 & 1 & -2(n+1)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Сумма всех элементов первой строки матрицы A^n равна 1+2n+2 n(17- n). Рассмотрим функцию S(x)= 1+2 x +2 x (17- x)=1+36 x -2 x^2 . Производная функции равна нулю при x равном 9, поэтому максимальное значение функции равно S(9)=163. Следовательно, искомое значение степени равно 9.

Задача № 3

Последовательности целых чисел с общими членами a_n и b_n таковы, что

$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ для всех натуральных n.

Найдите предел отношения a_n/b_n при n стремящемся к бесконечности.

Решение. Используем бином Ньютона: $(1+\sqrt{2})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\sqrt{2}\right)^{n-k}=S_1+S_2\sqrt{2}$. Здесь: $a_n=S_1$ и $b_n=S_2$ – суммы при четных и нечётных степенях $n-k$, соответственно. Отсюда следует, что $(1-\sqrt{2})^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(-\sqrt{2}\right)^{n-k}=S_1-S_2\sqrt{2}=a_n-b_n\sqrt{2}$. Решая систему уравнений $\begin{cases}\left(1+\sqrt{2}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{2}\\ (1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}\end{cases}$, получаем $\begin{cases}a_n=\frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n\right)\\ b_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right)\end{cases}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\frac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\sqrt{2})^n\left(1+\frac{(1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n}\right)}{(1+\sqrt{2})^n\left(1-\frac{(1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})^n}\right)}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}=\sqrt{2}.$$

Задача № 4

Найдите предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x\dfrac{\ln\dfrac{x+1}{x}-\ln\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right)}{1+x\sin\dfrac{1}{x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty} x\frac{\ln\dfrac{x+1}{x}-\ln\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right)}{1+x\sin\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x+1}{x(1-\sin(1/x))}-1\right)}{\left(\dfrac{x+1}{x(1-\sin(1/x))}-1\right)}\frac{\left(\dfrac{x+1}{1-\sin(1/x)}-x\right)}{1+x\sin\dfrac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x+x\sin(1/x)}{\left(1+x\sin\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x\sin\dfrac{1}{x}}{\left(1+x\sin\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right)}=1.$$

Задача № 5

Равносторонние треугольники со сторонами 1, 3, 5,... поставлены в ряд на горизонтальном основании вплотную друг к другу. Докажите, что вершины треугольников находятся на одной параболе и удалены на целочисленные расстояния от ее фокуса.

Решение. Выберем декартову прямоугольную систему координат таким образом, что ось абсцисс совпадает с горизонтальным основанием, на котором поставлены треугольники, а начало координат находится на середине основания первого треугольника. Тогда координаты вершин треугольника на основании равны: -1/2; 1-1/2; 1+3-1/2; 1+3+5-1/2;…;1+3+5+…+(2n-1)-1/2. Сумма n первых членов арифметической прогрессии 1, 3, 5,..., 2n-1 равна n^2. Поэтому середины отрезков от $(n-1)^2$ -1/2 до n^2 -1/2 – середины оснований треугольников находятся в точках $x_n=n(n-1)$. Высоты треугольников равны $y_n=h_n=\sqrt{(2n-1)^2-(2n-1)^2/4}=\sqrt{3}(2n-1)/2$, поэтому вершины имеют координаты $\mathrm{S}\big(n(n-1),\sqrt{3}(2n-1)/2\big)$.

Исключая n из равенств $x=n(n-1)$ и $y=\sqrt{3}(2n-1)/2$, получаем $y^2=3(x+\frac{1}{4})$.

Расстояние от фокуса параболы $F(1/2,0)$ до вершины равно целому числу $\sqrt{(n(n-1)-1/2)^2-3(2n-1)^2/4}$=$\sqrt{(1-n+n^2)^2}$=$1-n+n^2$.

Задача № 6

Решите уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2018/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1009 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$\begin{pmatrix} 1 & 1/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2018/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (1 + 2 + \cdots + 2018)/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1 + 2 + \cdots + 2018}{x} = \frac{1 + 2018}{2x} 2018 = \frac{2019 \cdot 1009}{x}$$

Решая уравнение $\frac{2019 \cdot 1009}{x} = 1009$, получаем x=2019.