Томский политехнический университет
Областной тур Всероссийской олимпиады по математике
9 апреля 2017 года 2-4 курсы

Задача № 1

Пусть A – невырожденная матрица. Существует ли многочлен $P(x)$, такой что $A^{-1} = P(A)$?

Решение. Рассмотрим характеристический многочлен матрицы A:

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda E) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + (-1)^n \lambda^n .$$

Заметим, что $a_0 = \det A \neq 0$, поскольку A – обратимая матрица. Из теоремы Гамильтона–Кэли следует, что $\Delta(A) = 0$, т.е.

$$a_0 E = -[a_1 A + \ldots + (-1)^n A^n],$$

откуда

$$E = -\frac{1}{a_0}[a_1 A + \ldots + (-1)^n A^n],$$

или

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}[a_1 E + \ldots + (-1)^n A^{n-1}].$$

Таким образом,

$$P(x) = -\frac{1}{a_0}[a_1 + \ldots + (-1)^n x^{n-1}].$$

Задача № 2

Пусть $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, такая что

$$f(x) = x^2 \text{ при } x \le 0$$

и

$$f'(x) = f(x^2 - 2x) \text{ при } x \ge 0 .$$

Найти $f(1)$.

Решение. Проведём преобразование: $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \le 0$ для всех $x \in [0,1]$. Обозначим $\alpha(x) = x^2 - 2x$. Тогда

$$f(\alpha(x)) = \alpha^2(x) = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2,$$

т.е.

$$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2,$$

откуда

$$f(x) = \int_0^x (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\,dx \text{ для всех } x \in [0,1]$$

и

$$f(1) = \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\,dx = \frac{8}{15}.$$

Задача № 3

Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = \frac{1+\sqrt{3}x_n}{\sqrt{3}-x_n},$$

где $x_1 = 1$. Найти x_{2017}.

Решение. Найдём

$$x_2 = 2+\sqrt{3},$$
$$x_3 = -2-\sqrt{3},$$
$$x_4 = -1,$$
$$x_5 = -2+\sqrt{3},$$
$$x_6 = 2-\sqrt{3},$$
$$x_7 = 1 = x_1.$$

Отсюда следует $x_{n+6} = x_n$ для всех $x \in \mathbb{N}$, т.е. последовательность периодична и

$$x_{2017} = x_{6\cdot 336+1} = x_1 = 1.$$

Задача № 4

Доказать, что решения уравнения

$$z^7 + 6z^4 + 3z + 1 = 0, \quad z \in \mathrm{C},$$

лежат в круге радиуса 2 с центром в начале координат.

Решение. Обозначим $P(z) = z^7 + 6z^4 + 3z + 1$. Предположим, что существуют z_k, такие что $|z_k| \geq 2$, $P(z_k) = 0$, $z_k \neq 0$. Тогда

$$0 = \left|\frac{P(z_k)}{z_k^7}\right| = \left|1 + \frac{6}{z_k^3} + \frac{3}{z_k^6} + \frac{1}{z_k^7}\right|.$$

Воспользуемся неравенством для модуля суммы двух комплексных чисел

$$|\alpha+\beta| \geq |\alpha| - |\beta|$$

и получим

$$0 = \left|1 + \frac{6}{z_k^3} + \frac{3}{z_k^6} + \frac{1}{z_k^7}\right| \geq 1 - \frac{6}{|z_k^3|} - \frac{3}{|z_k^6|} - \frac{1}{|z_k^7|} = 1 - \frac{6}{8} - \frac{3}{64} - \frac{1}{128} = \frac{25}{128} > 0.$$

Получили противоречие, из которого следует, что таких z_k нет, что и требовалось доказать.

Задача № 5

Найти решения дифференциального уравнения, ограниченные на отрезке [–2017,2017]

$$xy'' + 2y' - 2017xy = 0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(xy)'' - 2017xy = 0.$$

Сделаем замену $xy = z$ и получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$z'' - 2017z = 0,$$

общее решение которого

$$z = C_1 \operatorname{sh}\sqrt{2017}x + C_2 \operatorname{ch}\sqrt{2017}x,$$

откуда

$$y = \frac{C_1 \operatorname{sh}\sqrt{2017}x}{x} + \frac{C_2 \operatorname{ch}\sqrt{2017}x}{x}, \quad x \neq 0.$$

Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{2017}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2017}\operatorname{ch}\sqrt{2017}x}{1}=\sqrt{2017}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{2017}x}{x}=\infty.$$

Следовательно, ограниченные на отрезке [–2017,2017] решения имеют вид

$$y=\frac{C_1\operatorname{sh}\sqrt{2017}x}{x},\quad x\neq 0.$$

Задача № 6

Показать, что существует отрезок $\sigma(k,m)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+3n+2}$ такой, что $\sigma(k,m)=\dfrac{1}{2017}$.

Отрезком ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется $\sigma(k,m)=\sum\limits_{n=k}^{m}a_n$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{m+2}.$$

Покажем, что существуют такие $k,m\in\mathbb{N}$, что

$$\sigma(k,m)=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{m+2}=\frac{1}{2017}.$$

Выберем $k=2016-1=2015$, $m=2016\cdot 2017-2$. Тогда

$$\sigma(2015,2016\cdot 2017-2)=\sum_{n=2016-1}^{2016\cdot 2017-1}\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{1}{2016}-\frac{1}{2016\cdot 2017}=\frac{2017-1}{2016\cdot 2017}=\frac{1}{2017}.$$