Томский политехнический университет
Областной тур Всероссийской олимпиады по математике
9 апреля 2017 года • 1 курс

Задача № 1

Пусть A – невырожденная матрица. Существует ли многочлен $P(x)$, такой что $A^{-1} = P(A)$?

Решение. Рассмотрим характеристический многочлен матрицы A:

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda E) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + (-1)^n \lambda^n .$$

Заметим, что $a_0 = \det A \neq 0$, поскольку A – обратимая матрица. Из теоремы Гамильтона–Кэли следует, что $\Delta(A) = 0$, т.е.

$$a_0 E = -[a_1 A + \ldots + (-1)^n A^n],$$

откуда

$$E = -\frac{1}{a_0}[a_1 A + \ldots + (-1)^n A^n],$$

или

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}[a_1 E + \ldots + (-1)^n A^{n-1}].$$

Таким образом,

$$P(x) = -\frac{1}{a_0}[a_1 + \ldots + (-1)^n x^{n-1}].$$

Задача № 2

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 таковы, что

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 = 2015,$$
$$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 = 2016,$$
$$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 = 2017.$$

Найти

$$16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 .$$

Решение. Систему

$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 = 2015$,
$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 = 2016$,
$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 = 2017$

запишем в виде

$1^2 x_1 + 2^2 x_2 + 3^2 x_3 + 4^2 x_4 + 5^2 x_5 + 6^2 x_6 = 2015$,
$2^2 x_1 + 3^2 x_2 + 4^2 x_3 + 5^2 x_4 + 6^2 x_5 + 7^2 x_6 = 2016$,
$3^2 x_1 + 4^2 x_2 + 5^2 x_3 + 6^2 x_4 + 7^2 x_5 + 8^2 x_6 = 2017$.

Рассмотрим уравнение

$$an^2 + b(n+1)^2 + c(n+2)^2 = (n+3)^2 .$$

Раскрыв скобки и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях n, получим систему

$$a + b + c = 1,$$
$$2b + 4c = 6,$$
$$b + 4c = 9,$$

откуда $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$. Тогда

$$16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 = 1\cdot 2015 - 3\cdot 2016 + 3\cdot 2017 = 2018.$$

Задача № 3

Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = \frac{1+\sqrt{3}x_n}{\sqrt{3}-x_n},$$

где $x_1 = 1$. Найти x_{2017}.

Решение. Найдём

$$x_2 = 2+\sqrt{3},$$
$$x_3 = -2-\sqrt{3},$$
$$x_4 = -1,$$
$$x_5 = -2+\sqrt{3},$$
$$x_6 = 2-\sqrt{3},$$
$$x_7 = 1 = x_1.$$

Отсюда следует $x_{n+6} = x_n$ для всех $x \in \mathbb{N}$, т.е. последовательность периодична и

$$x_{2017} = x_{6\cdot 336+1} = x_1 = 1.$$

Задача № 4

Даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и определены

$$\vec{u} = (\vec{b},\vec{c})\vec{a} - (\vec{c},\vec{a})\vec{b};$$
$$\vec{v} = (\vec{a},\vec{c})\vec{b} - (\vec{a},\vec{b})\vec{c};$$
$$\vec{w} = (\vec{b},\vec{a})\vec{c} - (\vec{b},\vec{c})\vec{a}.$$

Доказать, что если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют треугольник, то векторы $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ также образуют треугольник и эти треугольники подобны.

Решение. Очевидно, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ принадлежат одной плоскости. Найдем

$$(\vec{u},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c})(\vec{a},\vec{c}) - (\vec{c},\vec{a})(\vec{b},\vec{c}) = 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{u}$ и $\vec{c}$ ортогональны. Аналогично доказывается, что вектор $\vec{v}$ ортогонален $\vec{a}$ и вектор $\vec{w}$ ортогонален $\vec{b}$.

Найдем $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = \vec{0}$. Следовательно, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ образуют треугольник, стороны которого ортогональны сторонам треугольника, образованного векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Поскольку эти треугольники имеют равные углы, они подобны, что и требовалось доказать.

Задача № 5

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \pi \operatorname{ctg} \pi x\right).$$

Решение. Представим данную в скобках разность в виде отношения двух функций:

$$\frac{1}{\ln x} - \pi \operatorname{ctg} \pi x = \frac{\sin \pi x - \pi \ln x \cdot \cos \pi x}{\ln x \cdot \sin \pi x} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Получим неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Можем применить правило Лопиталя, так как функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям применимости этого правила: они определены и дифференцируемы при $x \in \left(\frac{1}{2};1\right) \cup \left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Найдём

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\pi\cos\pi x-\dfrac{\pi}{x}\cos\pi x+\pi^2\ln x\cdot\sin\pi x}{\dfrac{1}{x}\sin\pi x+\pi\ln x\cdot\cos\pi x}=\frac{\pi x\cos\pi x-\pi\cos\pi x+\pi^2 x\ln x\cdot\sin\pi x}{\sin\pi x+\pi x\ln x\cdot\cos\pi x},$$

т.е.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Найдём теперь

$$\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{\pi\cos\pi x-\pi^2 x\sin\pi x+\pi^2\sin\pi x+\pi^2\ln x\cdot\sin\pi x+\pi^2\sin\pi x-\pi^3 x\ln x\cdot\cos\pi x}{\pi\cos\pi x+\pi\ln x\cdot\cos\pi x+\pi\cos\pi x-\pi^2 x\ln x\cdot\sin\pi x}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{-\pi}{-2\pi}=\frac{1}{2}.$$

Задача № 6

Дано уравнение

$$x^6-100x+1=0,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

а) Доказать, что оно имеет только 2 действительных корня и эти корни положительны.

б) Найти первые две отличные от нуля цифры в десятичной записи меньшего корня этого уравнения и указать их место в десятичной записи.

Решение. Положим $f(x)=x^6-100x+1$. Если бы уравнение $f(x)=0$ имело более двух корней, то уравнение $f'(x)=6x^5-100=0$ имело бы не менее двух корней, а оно имеет только один корень:

$$x_0=\left(\frac{50}{3}\right)^{1/5}=\sqrt[5]{\frac{50}{3}}>0.$$

Кроме того, $f(0)=1>0$, $f(1)=-98<0$, $f(2)=2^6-200+1<0$, $f(3)=3^6-300+1>0$. Значит, оба корня положительны.

б) Меньший корень лежит между нулём и единицей: $x_м\in]0,1[$. Рассмотрим два числа

$$x_1=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^{14}}\quad\text{и}\quad x_2=\frac{1}{10^2}+\frac{2}{10^{14}}.$$

Докажем, что $f(x_1)>0$, а $f(x_2)<0$, отсюда будет следовать, что меньший корень $x_м\in]x_1,x_2[$, т.е. $x_1<x_м<x_2$.

Имеем

$$f(x_1)=\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^{14}}\right)^6-10^2\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^{14}}\right)+1=$$

$$=\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^{14}}\right)^6-\frac{1}{10^{12}}=\frac{1}{10^{12}}\left[\left(1+\frac{1}{10^{12}}\right)^6-1\right]>0.$$

Аналогично

$$f(x_2)=\frac{1}{10^{12}}\left[\left(1+\frac{1}{10^{12}}\right)^6-2\right]<0.$$

Итак, первые две отличные от нуля цифры меньшего корня равны 1 и стоят на 2 и 14 местах после запятой:

$$x_м\approx\underbrace{0{,}010...01}_{14}..$$