Национальный исследовательский Томский государственный университет

Областная олимпиада по математике

24 апреля 2016 года

(Старшие курсы)

Задача 1. Докажите, что любое натуральное число является частичной суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$, где a_n — это целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$.

Задача 2. Найти все числа $\lambda > 0$ и решения $y(x) \neq 0$ дифференциального уравнения $y''(x) + \lambda y(x) = 0,$ удовлетворяющие условиям $y'(0) = 0$, $y(0) = (1-\lambda)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\cos t dt$.

Задача 3. При каких положительных значениях параметра a сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^a \cos^2 x}$?

Задача 4. Найдите все действительные решения уравнения $(ix+1)^{100} = (x+i)^{100}$.

Задача 5. В ромбе $ABCD$ угол A составляет 120°, $AB = 1$. Прямые BC и CD пересекают окружность ω_1, описанную вокруг треугольника ABD, в точках K и L, отличных от точек B и D соответственно. Введем декартову систему координат с началом в центре окружности ω_2, описанной вокруг треугольника CKL, и осью ординат, направленной в сторону центра окружности ω_1. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} y\, dxdy$, где Ω – область, ограниченная окружностями ω_1 и ω_2.

Задача 6. Вычислите $\int\limits_0^2 \left(\left[x^2\right] - \left[x\right]^2\right) dx$, где $[x]$ – это целая часть числа x.

Решения. Старшие курсы.

Задача 1. Докажите, что любое натуральное число является частичной суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$, где a_n — это целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$.

Решение. Заметим, что в последовательности $\{a_n\}$ встречаются все натуральные числа, причем каждое из них — несколько раз. Посмотрим, сколько раз в последовательности повторяется число k. Пусть $a_n = k$. Тогда k является ближайшим к $\sqrt{n}$,что эквивалентно условию $\left|\sqrt{n}-k\right| < 0,5$, т.е. $k-0,5 < \sqrt{n} < k+0,5$. Возведя все части неравенства в квадрат и учитывая, что числа n и k целые, получим $k^2 - k < n \le k^2 + k$. Таким образом, если $n \in (k^2 - k; k^2 + k]$, то $a_n = k$. Осталось заметить, что в данный промежуток входит ровно $2k$ целых чисел. Итак, последовательность $\{a_n\}$ состоит из всех натуральных чисел k, каждое из которых повторяется $2k$ раз.

Рассмотрим сумму слагаемых ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$, равных $\frac{1}{k}$. Так как ряд содержит $2k$ таких слагаемых, то их сумма равна $2k\cdot\frac{1}{k}=2$. Следовательно, частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$, состоящая из первых m групп равных слагаемых, равна $2m$. Если же к этой сумме добавить $(m + 1)$ слагаемое из следующей группы слагаемых, равных $\frac{1}{m+1}$, то сумма будет равняться $2m + 1$. Таким образом, любое натуральное (как четное, так и нечетное) число является некоторой частичной суммой ряда исходного ряда.

Задача 2. Найти все числа $\lambda > 0$ и решения $y(x) \ne 0$ дифференциального уравнения $y''(x) + \lambda y(x) = 0,$ удовлетворяющие условиям $y'(0) = 0$, $y(0) = (1-\lambda)\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\cos t dt$.

Решение. Общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}x)$.

Решим задачу Коши. Составим систему для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = \left(1-\lambda\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(C_1\cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}t)\right)\cos t dt \\ C_2\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}.$$

Из второго равенства системы находим, что $C_2 = 0$. Первое равенство системы примет вид $C_1 = \left(1-\lambda\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} C_1\cos(\sqrt{\lambda}t)\cos t dt$. Заметим, что C_1 отлично от нуля.

Найдем $\lambda > 0$, используя равенство $(1-\lambda)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sqrt{\lambda}t)\cos t dt = 1$. Вычислим интеграл:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sqrt{\lambda}t)\cos t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(\sqrt{\lambda}-1)t + \cos(\sqrt{\lambda}+1)t\right) dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\sqrt{\lambda}-1)t}{\sqrt{\lambda}-1} + \frac{\sin(\sqrt{\lambda}+1)t}{\sqrt{\lambda}+1}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$= \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)}{1-\lambda}$. Следовательно, имеем $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) = 1$, откуда $\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda} = 2\pi n$ и $\lambda = 16n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $y(x) = C\cos(\sqrt{\lambda}x)$, $\lambda = 16n^2$, $n \in \mathbb{Z}$

Задача 3. При каких положительных значениях параметра a сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^a \cos^2 x}$?

Решение. Сходимость данного интеграла равносильна сходимости следующего числового ряда: $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{dx}{1 + x^a \cos^2 x}$. В интеграле $\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{dx}{1 + x^a \cos^2 x}$ сделаем замену $t = x - \pi k$, $dx = dt$, $\cos x = \cos(t + \pi k) = (-1)^k \cos t$; получим $\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{dx}{1 + x^a \cos^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (t + \pi k)^a \cos^2 t}$.

Для интеграла $\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (t + \pi k)^a \cos^2 t}$ справедлива следующая оценка:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (k+1)^a \pi^a \cos^2 t} < \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (t + \pi k)^a \cos^2 t} < \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1 + k^a \pi^a \cos^2 t}.$$

Вычисляя теперь интегралы: $\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1 + k^a \pi^a \cos^2 t} = \int\limits_0^{\pi/2} \ldots + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ldots = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d(\operatorname{tg} t)}{1 + k^a \pi^a + \operatorname{tg}^2 t} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ldots =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + k^a \pi^a}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + k^a \pi^a}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{1}{\sqrt{1 + k^a \pi^a}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + k^a \pi^a}}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + k^a \pi^a}},$$

$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (k+1)^a \pi^a \cos^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + (k+1)^a \pi^a}}$, мы получим окончательно двойное неравенство $\frac{\pi}{\sqrt{1 + (k+1)^a \pi^a}} < \int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (t + \pi k)^a \cos^2 t} < \frac{\pi}{\sqrt{1 + k^a \pi^a}}$. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{1 + k^a \pi^a}}$ сходится при $a > 2$ $\left(\frac{\pi}{\sqrt{1 + k^a \pi^a}} \underset{k \to \infty}{\sim} \frac{\pi}{k^{a/2}}\right)$, поэтому и рассматриваемый ряд по признаку сравнения сходится при $a > 2$, а так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{1 + (k+1)^a \pi^a}}$ расходится при $a \le 2$, то расходится и данный ряд. Следовательно, несобственный интеграл сходится при $a > 2$ и расходится при $a \le 2$.

Задача 4. Найдите все действительные решения уравнения $(ix+1)^{100}=(x+i)^{100}$.

Решение. Разделим обе части равенства на $(x+i)^{100}$, получим $\left(\dfrac{ix+1}{x+i}\right)^{100}=1.$

Поскольку $\left|\dfrac{ix+1}{x+i}\right|=1,$ то дробь можно представить в виде $\dfrac{ix+1}{x+i}=e^{i\varphi}$. Выражая x, получим

$$x=\frac{1}{i}\cdot\frac{ie^{i\varphi}-1}{ie^{i\varphi}+1}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}-1}{e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}+1}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}-e^{-i\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}=tg\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right), \text{ где } \varphi\neq\frac{\pi}{2}.$$

Исходное уравнение принимает вид $e^{i100\varphi}=e^{i2\pi n}$, $n\in\mathbb{Z}$, отсюда мы находим, что $\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{\pi n}{100}$, $n=0;1;\ldots;99$, а значит, $x=tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{100}\right)$, $n=0;1;\ldots;99$ (кроме n, равного 25).

Задача 5. В ромбе $ABCD$ угол A составляет 120°, $AB=1$. Прямые BC и CD пересекают окружность ω_1, описанную вокруг треугольника ABD, в точках K и L, отличных от точек B и D соответственно. Введем декартову систему координат с началом в центре окружности ω_2, описанной вокруг треугольника CKL, и осью ординат, направленной в сторону центра окружности ω_1. Вычислите $\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy$, где Ω – область, ограниченная окружностями ω_1 и ω_2.

Решение. Так как $CB=CD=CA=1$, то точка C является центром окружности ω_1, а значит, $CL=CK=1$. Достроив треугольник CKL до ромба $CKML$, получим, что $MK=ML=MC=1$, а значит, точка M – центр окружности ω_2 и M лежит на окружности ω_1. В полярной системе координат уравнение окружности ω_1 имеет вид $\rho=2\sin\varphi$, а ω_2 – уравнение $\rho=1$. Получаем

$$\iint\limits_{\Omega} y\,dxdy=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}\rho^2\sin\varphi\,d\rho+\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\sin\varphi\,d\rho=\frac{16}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^4\varphi\,d\varphi+\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\sin\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Задача 6. Вычислите $\int\limits_0^2\left(\left[x^2\right]-\left[x\right]^2\right)dx$, где $[x]$ – это целая часть числа x.

Решение. Рассмотрим функции $\left[x\right]^2$ и $\left[x^2\right]$ на отрезке [0; 2]. Получим

$$\left[x^2\right]=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x<\sqrt{2}\\ 2, & \sqrt{2}\le x<\sqrt{3}\\ 3, & \sqrt{3}\le x<2\\ 4, & x=2\end{cases} \text{ и } \left[x\right]^2=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x<2\\ 4, & x=2\end{cases}. \text{ Следовательно, } \left[x^2\right]-\left[x\right]^2=\begin{cases}0, & 0\le x<\sqrt{2}\\ 1, & \sqrt{2}\le x<\sqrt{3}\\ 2, & \sqrt{3}\le x<2\\ 0, & x=2\end{cases} \text{ и}$$

$$\int\limits_0^2\left(\left[x^2\right]-\left[x\right]^2\right)dx=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}dx+2\int\limits_{\sqrt{3}}^2dx=4-\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$