Национальный исследовательский Томский государственный университет

Областная олимпиада по математике

24 апреля 2016 года

(Первый курс)

Задача 1. Существуют ли матрица A из 3 строк и 2 столбцов и матрица B из 2 строк и 3 столбцов такие, что $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? Ответ обоснуйте.

Задача 2. Известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{A_1x^{k_1}} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{A_2x^{k_2}} = 1$, где A_1, A_2, k_1, k_2 – фиксированные вещественные числа, такие, что $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ и выражение $A_1x^{k_1} + A_2x^{k_2}$ не равно тождественному нулю. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+g(x)}{A_1x^{k_1} + A_2x^{k_2}} = 1$.

Задача 3. Студент Иван Недалёкий полагает, что $\operatorname{arctg} x = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$. Докажите, что существует $x \in (0; 1)$, для которого это равенство является справедливым.

Задача 4. Решите уравнение $\big||x+[x]|-1\big| = x$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Задача 5. Найдите наименьшее расстояние между параболой $y = x^2$ и окружностью $(x-18)^2 + y^2 = 1$.

Задача 6. Пусть n – фиксированное натуральное число, отличное от единицы. Запишите (аналитически) пример функции $y = f(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) f – вещественная функция, определенная на всей вещественной прямой;
2) функция дифференцируема во всей области определения;
3) функция имеет ровно n максимумов и n минимумов на промежутке (0;1);
4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$.

Решения. Первый курс.

Задача 1. Существуют ли матрица A из 3 строк и 2 столбцов и матрица B из 2 строк и 3 столбцов такие, что $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? Ответ обоснуйте.

Ответ: нет, не существуют.

Решение. Если даны матрицы $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$, то для матриц

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } D = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

как нетрудно видеть, выполнено $AB = CD$. Следовательно, $|AB| = |CD| = |C| \cdot |D| = 0 \cdot 0 = 0$. Однако единичная матрица имеет определитель 1 и, значит, не может быть представлена в виде произведения AB.

Задача 2. Известно, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{A_1 x^{k_1}} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{A_2 x^{k_2}} = 1$, где A_1, A_2, k_1, k_2 – фиксированные вещественные числа, такие, что $A_1 \neq 0$, $A_2 \neq 0$ и выражение $A_1 x^{k_1} + A_2 x^{k_2}$ не равно тождественному нулю. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{A_1 x^{k_1} + A_2 x^{k_2}} = 1$.

Решение. а) Если $k_1 = k_2$, то $A_1 + A_2 \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{A_1 x^{k_1} + A_2 x^{k_2}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{(A_1 + A_2) x^{k_1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)}{A_1 x^{k_1}} + \frac{g(x)}{A_1 x^{k_1}}}{\frac{A_1 + A_2}{A_1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)}{A_1 x^{k_1}}}{\frac{A_1 + A_2}{A_1}} + \lim_{x\to 0} \frac{\frac{g(x)}{A_2 x^{k_1}}}{\frac{A_1(A_1 + A_2)}{A_1 A_2}} =$$

$$= \frac{A_1}{A_1 + A_2} + \frac{A_2}{A_1 + A_2} = 1.$$

б) Пусть теперь $k_1 > k_2, k_1 - k_2 > 0, k_2 - k_1 < 0.$ Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)}{A_1 x^{k_1} + A_2 x^{k_2}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{A_1 x^{k_1} + A_2 x^{k_2}} + \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{A_1 x^{k_1} + A_2 x^{k_2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{A_1 x^{k_1} \left(1 + \frac{A_2}{A_1} x^{(k_2 - k_1)}\right)} + \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{A_2 x^{k_2} \left(1 + \frac{A_1}{A_2} x^{(k_1 - k_2)}\right)} = 0 + 1 = 1.$$

Задача 3. Студент Иван Недалёкий полагает, что $\operatorname{arctg} x = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$. Докажите, что существует $x \in (0; 1)$, для которого это равенство является справедливым.

Решение. Заметим, что $\arccos x \in [0; \pi]$, отсюда $\frac{\pi}{2} - \arccos x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда из равенств $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$ следует, что $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Это позволяет переписать исходное равенство в виде $g(x) = 0$, где $g(x) = \dfrac{\pi}{2\arccos x} - 1 - \operatorname{arctg} x$. Имеем $g'(x) = \dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{1+x^2}$; так как $g'(0) = \dfrac{2}{\pi} - 1 < 0$, то существует $\varepsilon > 0$ с тем свойством, что при $x \in (0; \varepsilon]$ выполнено $0 > \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{g(x)}{x}$ и, значит, $g(x) < 0$. С другой стороны, $g(1-0) = \dfrac{\pi}{+0} - 1 - \dfrac{\pi}{4} = +\infty$. Поскольку $g(\varepsilon) < 0$, а при значениях x, близких к 1, справедливо неравенство $g(x) > 0$, то ввиду непрерывности функции $g(x)$ найдётся $x \in (\varepsilon; 1)$ такое, что $g(x) = 0$.

Задача 4. Решите уравнение $\left|\left|x + [x]\right| - 1\right| = x$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Решение. Если $\left|x + [x]\right| - 1 > 0$, т.е. $\left|x + [x]\right| > 1$ и, далее, $\left[\begin{array}{l} x + [x] > 1, \\ x + [x] < -1, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1, \\ x < 0 \end{array}\right.$, то имеем уравнение $\left|x + [x]\right| = 1 + x$. Из этого уравнения в случае $x \ge 1$ следует уравнение $x + [x] = 1 + x$, или $[x] = 1$, решение которого есть промежуток $[1,2)$. Если же $x < 0$, то имеем уравнение $-x - [x] = 1 + x$, или $2x + [x] = -1$, которое не имеет решения (действительно, при $x < 0$ будет $x = n + r$, $0 \le r < 1$, $n = -1; -2; \ldots$; тогда имеем $[x] = n$, $2x + [x] = 3n + 2r = -1$, что невозможно, так как $3n + 2r < 3\cdot(-1) + 2\cdot 1 = -1$).

Если теперь $\left|x + [x]\right| - 1 < 0$, т.е. $\left|x + [x]\right| < 1$, что эквивалентно $0 \le x < 1$, то получим уравнение $1 - \left|x + [x]\right| = x$, или $\left|x + [x]\right| = 1 - x$. В силу того, что $0 \le x < 1$ и $[x] = 0$, данное уравнение принимает вид $x = 1 - x$, т.е. $x = \dfrac{1}{2}$. Таким образом, решениями уравнения являются $x = \dfrac{1}{2}$ и $x \in [1,2)$.

Задача 5. Найдите наименьшее расстояние между параболой $y = x^2$ и окружностью $(x-18)^2 + y^2 = 1$.

Решение. Пусть $d(x)$ – это расстояние от центра окружности, т.е. точки $C(18; 0)$, до произвольной точки параболы $M(x; x^2)$. Тогда $d^2(x) = (x-18)^2 + x^4$. Найдем наименьшее значение этой функции с помощью производной $\left(d^2(x)\right)' = 2(x-18) + 4x^3 = 0$. Получим уравнение $2x^3 + x - 18 = 0$. Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ является корнем уравнения, а поделив на $(x - 2)$, придем к уравнению $(x-2)(2x^2 + 4x + 9) = 0$, которое имеет единственное решение $x = 2$. С помощью второй производной $\left(d^2(x)\right)'' = 2 + 12x^2 > 0$ убеждаемся, что $x = 2$ является единственной точкой минимума, а значит, в ней функция достигает своего наименьшего значения. Таким образом, наименьшее расстояние от центра окружности до параболы равно $d(2) = \sqrt{(2-18)^2 + 2^4} = 4\sqrt{17}$, а значит, наименьшее расстояние между параболой и окружностью равно $4\sqrt{17} - 1$.

Задача 6. Пусть n – фиксированное натуральное число, отличное от единицы. Запишите (аналитически) пример функции $y = f(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) f – вещественная функция, определенная на всей вещественной прямой;
2) функция дифференцируема во всей области определения;
3) функция имеет ровно n максимумов и n минимумов на промежутке (0;1);
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Решение. Зададим функцию $f_1(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2n+1})$, $x \in [0,+\infty)$, где $a_k = \dfrac{1}{k}$, $k = 1; 2; ..; (2n+1)$. Эта функция имеет (2n + 1) нуль на промежутке (0,1], поэтому она имеет не менее 2n экстремумов на интервале (0;1). Так как, кроме того, производная $f_1'(x)$ представляет собой многочлен степени 2n, имеющий не более 2n корней, то функция $f_1(x)$ имеет ровно 2n экстремумов. Точки a_k разбивают промежуток (0,1] на промежутки знакопостоянства функции $f_1(x)$, причем соблюдается знакочередование этих промежутков. Следовательно, также чередуются максимумы и минимумы функции, а значит, функция имеет ровно n максимумов и n минимумов на интервале (0;1).

Положим $f_2(x) = e^{-\alpha x}(x + f_1(0))$ на промежутке $(-\infty, 0]$. Тогда если $\alpha < 0$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = 0$. Определим функцию $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \in [0,+\infty); \\ f_2(x), x \in (-\infty, 0]; \end{cases}$ так, чтобы она была дифференцируема в нуле (в остальных точках она, очевидно, дифференцируема). Так как $f_2'(x) = e^{-\alpha x}\left(-\alpha(x + f_1(0)) + 1\right)$ и $f_2'(0) = -\alpha f_1(0) + 1$, то из условия равенства производных в нуле $f_2'(0) = f_1'(0)$ получим $\alpha = \dfrac{1 - f_1'(0)}{f_1(0)}$.

Покажем, что α отрицательно. Действительно, $f_1(0) = -a_1 a_2 \cdots a_{2n+1} = -\dfrac{1}{(2n+1)!} < 0$,

$f_1'(0) = \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}}{a_1} + \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}}{a_2} + \cdots + \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}}{a_{2n+1}} = \dfrac{1 + 2 + \cdots + (2n+1)}{(2n+1)!} = \dfrac{n+1}{(2n)!} < 1$ при $n \geq 2$.