Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Олимпиада по математике • областной тур

7 апреля 2013 года • 1 курс

Решение каждого задания оформляется на отдельном листе бумаги

Задача 1.

В квадратной матрице A порядка $2n$ на главной диагонали стоят нули, а остальные элементы равны ± 1. Докажите, что $\det A \neq 0$.

Решение.

Рассмотрим матрицу $B = A^2$. В ней $b_{ii} -$ нечетные числа (сумма нуля и нечетного числа чисел ± 1), а $b_{ij}, i \neq j -$четные числа (сумма двух нулей и четного числа чисел ± 1). Разлагая определитель по элементам первой строки легко видеть, что $\det B = \det A^2 = (\det A)^2 -$нечётное число и, следовательно, $\det A \neq 0$.

Задача 2.

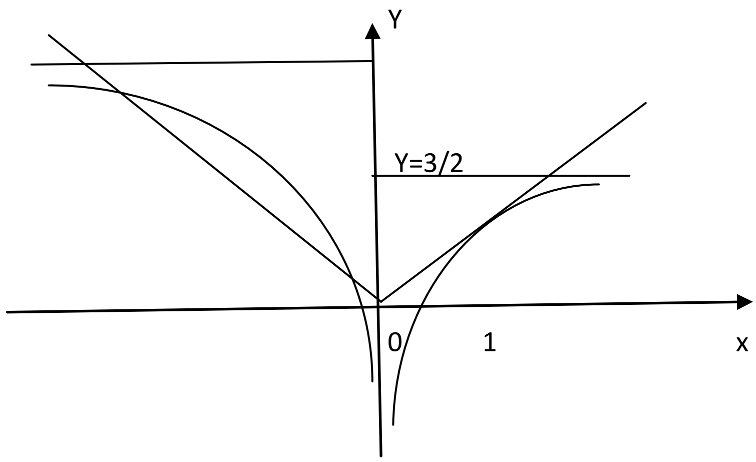
Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ найдите какую-нибудь первообразную функцию, график которой имеет ровно три общие точки с графиком функции $y = |x|$.

Решение.

Общий вид первообразной функции для $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2x^2} + C_1, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{2x^2} + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

Константы C_1 и C_2 выбираем так, чтобы одна из ветвей первообразной касалась графика функции $y = |x|$, а другая $-$ пересекала его: $C_1 = \dfrac{3}{2}$ и $C_2 > \dfrac{3}{2}$, или наоборот.



Пусть $x>0$. Тогда $F(x)=-\frac{1}{2x^2}+C_1$. C_1 найдем из условия $y'=F'(x_0),\ 1=\frac{1}{x_0^3}$,

$x_0=1,\ y(1)=F(1)\Rightarrow 1=-\frac{1}{2}+C_1,\ C_1=\frac{3}{2}$.

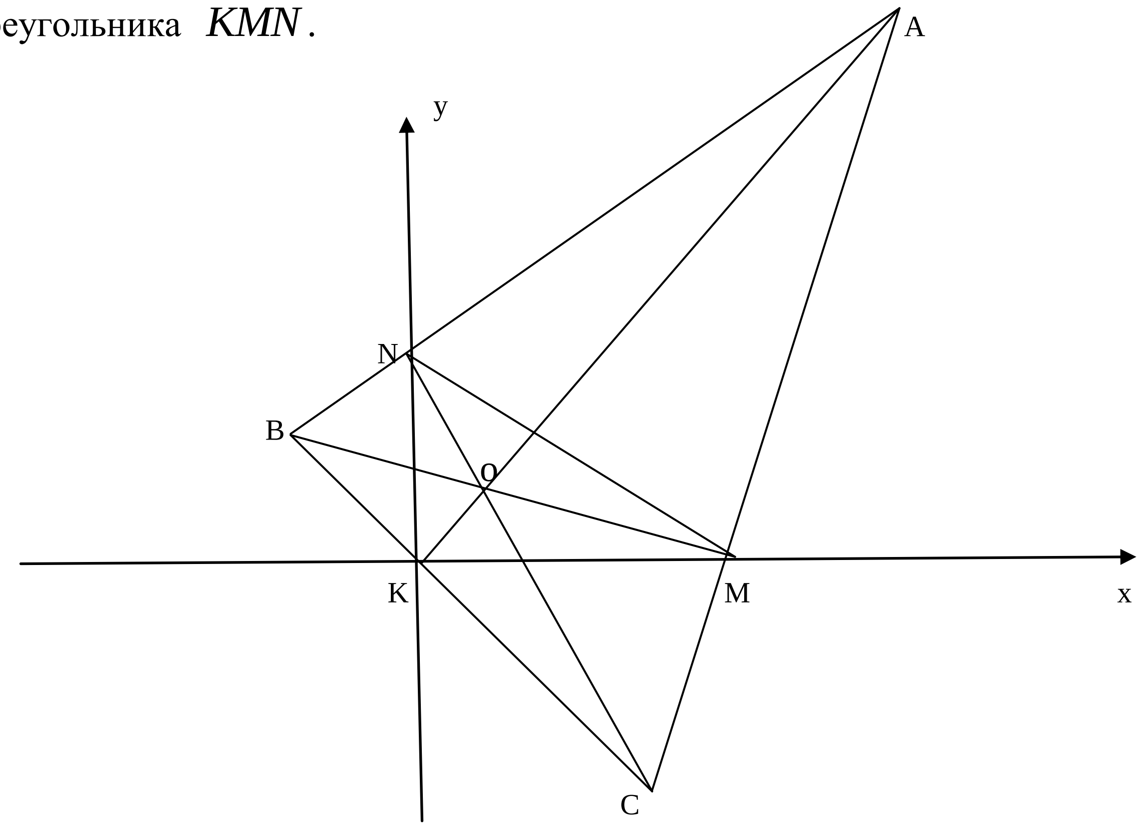
Ответ: $F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2x^2}+C_1,\ x>0,\ C_1=\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2x^2}+C_2,\ x<0,\ C_2>\frac{3}{2}\end{cases}$

Задача 3.

От сторон треугольника ABC отражается луч. Траектория луча совпадает с периметром треугольника KMN с вершинами $K(0;0),\ M(4;0),\ N(0;3)$. Найдите координаты вершин треугольника ABC и его площадь. (Используйте закон оптики: угол падения равен углу отражения).

Решение.

В декартовой системе координат постройте ΔKMN. Прямые $AB,\ AC,\ BC$ перпендикулярны биссектрисам $NO,\ MO,\ KO$ треугольника KMN и проходят через точки N, M, K, так как по условию траектория луча совпадает с периметром треугольника KMN.



Периметр ΔKMN равен 12. Найдём уравнения сторон $BC,\ AB,\ AC$, $k-$угловой коэффициент прямой. $k_{KA}=1,\ k_{BC}=-1$, уравнение $BC:\ y=-x$. Координаты точки O находим из $S_{\Delta KMN}=pr,\ \ r=\frac{6}{6}=1,\ O(1;1)$. Тогда $k_{NO}=-2,\ k_{AB}=\frac{1}{2}$, уравнение AB: $y=\frac{1}{2}x+3$. $k_{MO}=-\frac{1}{3}$, $k_{AC}=3$, $y=\frac{1}{2}x+3$, уравнение AC: $y=3x-12$. Отсюда находим $A(6;6)$, $B(-2;2)$, $C(3;-3)$.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\,BC\cdot AK=\frac{1}{2}5\sqrt{2}\;6\sqrt{2}=30$$

Ответ: $A(6;6)$, $B(-2;2)$, $C(3;-3)$, $S_{\Delta ABC}=30$.

Задача 4.

Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+\ldots+2013^{\frac{1}{n}}}{2013}\right)^n$$

Решение.

Воспользуемся формулами $a^x-1\sim x\ln a,\ x\to 0,\qquad a^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}\ln a,\ n\to\infty.$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+\ldots+2013^{\frac{1}{n}}}{2013}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2013+(1^{\frac{1}{n}}-1)+(2^{\frac{1}{n}}-1)+\ldots+(2013^{\frac{1}{n}}-1)}{2013}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2013n}\cdot\left(\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln 2013\right)\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln 2013!}{2013n}\right)^{\frac{2013n}{\ln 2013!}\cdot\frac{\ln 2013!}{2013}}=$$

$$=\exp\left(\frac{\ln 2013!}{2013}\right)=\left(2013!\right)^{\frac{1}{2013}}.$$

Ответ: $\left(2013!\right)^{\frac{1}{2013}}$

Задача 5.

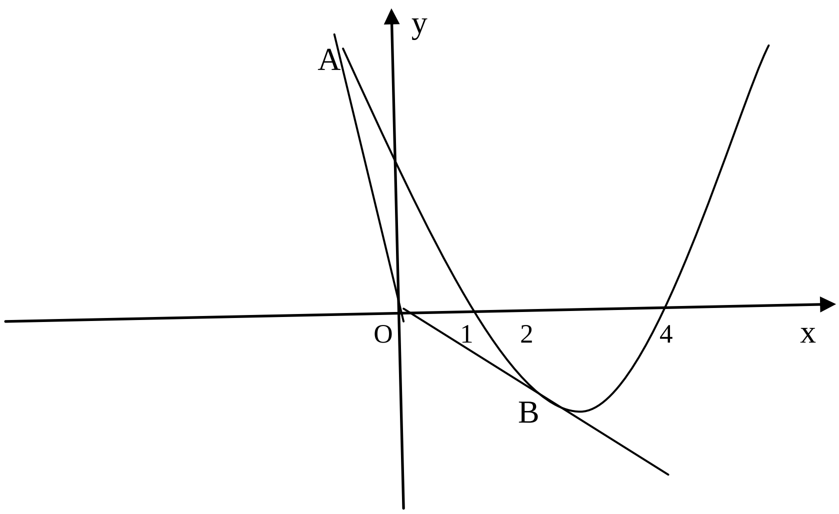
Корни квадратичной функции 1 и 4. К её графику из точки $O(0;0)$ проведены две касательные OA и OB (A и $B-$ точки касания). Какие значения может принимать $\cos\left(AOB\right)$?

Решение.

Найдём абсциссы точек касания прямой $y(x)=kx$ с графиком параболы $f(x)=a(x-1)(x-4)$. Касание означает, что уравнение $kx=a(x-1)(x-4)$ имеет единственное решение, то есть дискриминант уравнения $ax^2-(k+5a)x+4a=0$ равен нулю: $D=(k+5a)^2-16=0$. Отсюда находим $k_1=-9a$, $k_2=-a$. Этим значениям k соответствуют точки $x_1=-2$ и $x_2=2$. (Можно решить систему уравнений $\begin{cases} y(x) = f(x) \\ y'(x) = f'(x) \end{cases}$). Тогда при заданном a точки A и B будут иметь координаты $A(-2;18a)$ и $B(2;-2a)$. Найдём $\overrightarrow{OA} = \{-2;18a\}$, $\overrightarrow{OB} = \{2;-2a\}$. Тогда

$$\cos\left(AOB\right) = \frac{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA}\right)}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OA}\right|} = -\frac{9a^2+1}{\sqrt{1+81a^2}\sqrt{1+a^2}} < 0.$$

Обозначим $z(a) = \cos\left(AOB\right) < 0$. Тогда $z\sqrt{1+81a^2}\sqrt{1+a^2} = -(1+9a^2)$. Возводя в квадрат, получим: $81(z^2-1)a^4 + 2(41z^2-9)a^2 + z^2 - 1 = 0$. Требуем $D \geq 0$, откуда следует $\left(41z^2-9\right)^2 - \left(9(z^2-1)\right)^2 \geq 0$, $64z^2\left(25z^2-9\right) \geq 0$ и с учётом $z \in \left(-1;0\right]$, $\cos\left(AOB\right) \in \left(-1;-\frac{3}{5}\right]$.



Необходимо проверить, что для значения $z = -\frac{3}{5}$ существует a, так как для биквадратного уравнения условие неотрицательности дискриминанта является необходимым, но не достаточным для существования решения условием.

Для $z = -\frac{3}{5}$ существуют $a = \pm\frac{1}{3}$.

Ответ: $\cos\left(AOB\right) \in \left(-1;-\frac{3}{5}\right]$.

Задача 6.

Для функции $y = f(x)$ на отрезке $\left[a;b\right]$ существуют непрерывные производные первого и второго порядка. Выполняются равенства $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) = f'(b) = 0$. Докажите, что для $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ уравнение $f''(x) - 2\lambda f'(x) + \lambda^2 f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x)\, e^{-\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Найдём $g'(x)=\left(f'(x)-\lambda f(x)\right)\cdot e^{-\lambda x}$. Легко проверить, что верны равенства $g(a)=g(b)=g'(a)=g'(b)$. Найдём $g''(x)=\left(f''(x)-2\lambda f'(x)+\lambda^2 f(x)\right)\cdot e^{-\lambda x}$. Применяя теорему Ролля к $g'(x)$ на отрезке $[a;b]$, заключаем, что существует по крайней мере хотя бы одна точка $x_0\in(a;b)$ такая, что $g''(x_0)$, то есть $f''(x_0)-2\lambda f'(x_0)+\lambda^2 f(x_0)=0$ (учли, что $e^{-\lambda x}\neq 0$).

Задача 7.

Между городами M и N 60 километров. Три спортсмена отправились из M в N. У них есть скутер и велосипед. Скутер может ехать со скоростью 60 км/час, велосипед $-$30км/час. Пешком (спортивной ходьбой) каждый спортсмен может идти со скоростью 10км/час. И скутер, и велосипед можно оставить на дороге (никто не возьмёт!), где он будет стоять, пока им не воспользуется другой спортсмен. Требуется добраться до города N за наименьшее время, при этом время окончания путешествия определяется временем прибытия в N последнего спортсмена. Чему равно это наименьшее время? Сколько километров пешком прошёл каждый спортсмен?

Решение.

Каждый спортсмен преодолел 60 километров. Причём 60 км проехал скутер и 60 км поехал велосипед. Значит, все три спортсмена в сумме прошли пешком 60 км.
Таким образом, суммарное время, затраченное на путешествие, равно суммарному времени езду на скутере, велосипеде и пешей ходьбы и равно 1ч + 2ч + 6ч = 9ч.
Отсюда следует, что путешествие не может продолжаться менее 3ч и будет равно 3 часам, если путешественники прибывают в N одновременно.
Осталось показать, что это возможно. Пусть первый спортсмен x км шёл пешком, а $(60-x)$км ехал на скутере. Второй спортсмен сначала проехал y км на велосипеде, а оставшиеся $(60-y)$ км шёл пешком. Третий x км ехал на скутере, затем $(y-x)$км шёл пешком, а $(60-y)$км ехал на велосипеде. Тогда получим

1. $\dfrac{x}{10}+\dfrac{60-x}{60}=3 \Rightarrow x=24$км $-$ шёл пешком 1-й спортсмен

2. $\dfrac{60-y}{10}+\dfrac{y}{30}=3 \Rightarrow y=45$км , 2-й шёл пешком 60 - 45= 15км

3. $\dfrac{y-x}{10}+\dfrac{x}{60}+\dfrac{60-y}{30}=3$ $-$ проверка необходима для того, что при найденных значениях x и y скутер и велосипед прибывают в нужное место раньше, чем туда приходит пешеход.

$\dfrac{21}{10}+\dfrac{24}{60}+\dfrac{15}{30}=3$ (верно). 3-й шёл пешком 45-24 = 21км

Ответ: 3 часа, 24км, 15км, 21км